

1. 如图 1, 已知二次函数  $y=ax^2+\frac{3}{2}x+c$  ( $a\neq 0$ ) 的图象与  $y$  轴交于点  $A(0, 4)$ , 与  $x$  轴交于点  $B$ 、 $C$ , 点  $C$  坐标为  $(8, 0)$ , 连接  $AB$ 、 $AC$ .

(1) 请直接写出二次函数  $y=ax^2+\frac{3}{2}x+c$  的表达式;

(2) 判断  $\triangle ABC$  的形状, 并说明理由;

(3) 若点  $N$  在  $x$  轴上运动, 当以点  $A$ 、 $N$ 、 $C$  为顶点的三角形是等腰三角形时, 请写出此时点  $N$  的坐标;

(4) 如图 2, 若点  $N$  在线段  $BC$  上运动 (不与点  $B$ 、 $C$  重合), 过点  $N$  作  $NM\parallel AC$ , 交  $AB$  于点  $M$ , 当  $\triangle AMN$  面积最大时, 求此时点  $N$  的坐标.

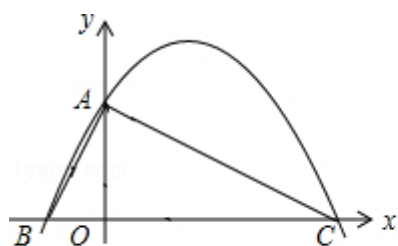


图1

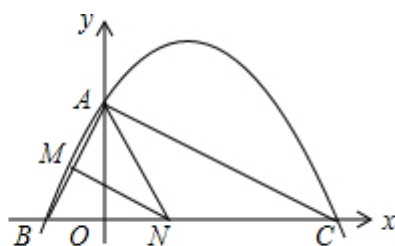


图2

2. 对于平面直角坐标系  $xOy$  中的图形  $M$ ,  $N$ , 给出如下定义:  $P$  为图形  $M$  上任意一点,  $Q$  为图形  $N$  上任意一点, 如果  $P$ ,  $Q$  两点间的距离有最小值, 那么称这个最小值为图形  $M$ ,  $N$  间的“闭距离”, 记作  $d(M, N)$ .

已知点  $A(-2, 6)$ ,  $B(-2, -2)$ ,  $C(6, -2)$ .

(1) 求  $d(\text{点 } O, \triangle ABC)$ ;

(2) 记函数  $y=kx$  ( $-1\leq x\leq 1$ ,  $k\neq 0$ ) 的图象为图形  $G$ . 若  $d(G, \triangle ABC)=1$ , 直接写出  $k$  的取值范围;

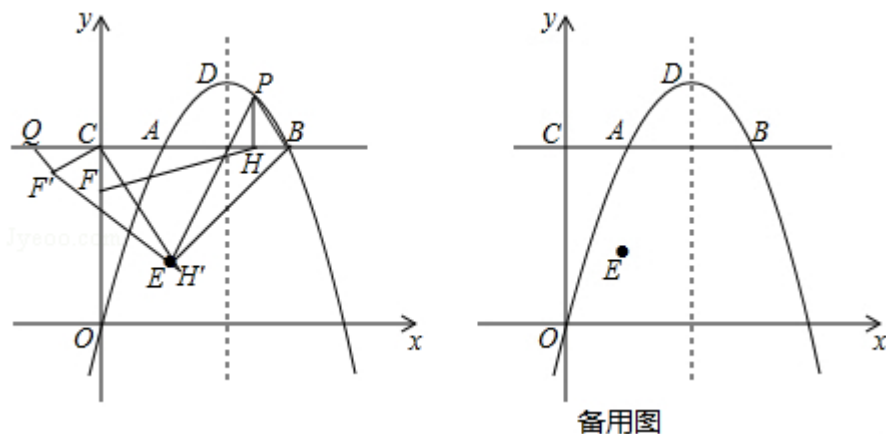
(3)  $\odot T$  的圆心为  $T(t, 0)$ , 半径为 1. 若  $d(\odot T, \triangle ABC)=1$ , 直接写出  $t$  的取值范围.

3. 如图, 在平面直角坐标系中, 点  $A$  在抛物线  $y=-x^2+4x$  上, 且横坐标为 1, 点  $B$  与点  $A$  关于抛物线的对称轴对称, 直线  $AB$  与  $y$  轴交于点  $C$ , 点  $D$  为抛物线的顶点, 点  $E$  的坐标为  $(1, 1)$ .

(1) 求线段  $AB$  的长;

(2) 点  $P$  为线段  $AB$  上方抛物线上的任意一点, 过点  $P$  作  $AB$  的垂线交  $AB$  于点  $H$ , 点  $F$  为  $y$  轴上一点, 当  $\triangle PBE$  的面积最大时, 求  $PH+HF+\frac{1}{2}FO$  的最小值;

(3) 在(2)中,  $PH+HF+\frac{1}{2}FO$  取得最小值时, 将 $\triangle CFH$  绕点  $C$  顺时针旋转  $60^\circ$  后得到 $\triangle CF'H'$ , 过点  $F'$  作  $CF'$  的垂线与直线  $AB$  交于点  $Q$ , 点  $R$  为抛物线对称轴上的一点, 在平面直角坐标系中是否存在点  $S$ , 使以点  $D, Q, R, S$  为顶点的四边形为菱形, 若存在, 请直接写出点  $S$  的坐标, 若不存在, 请说明理由.



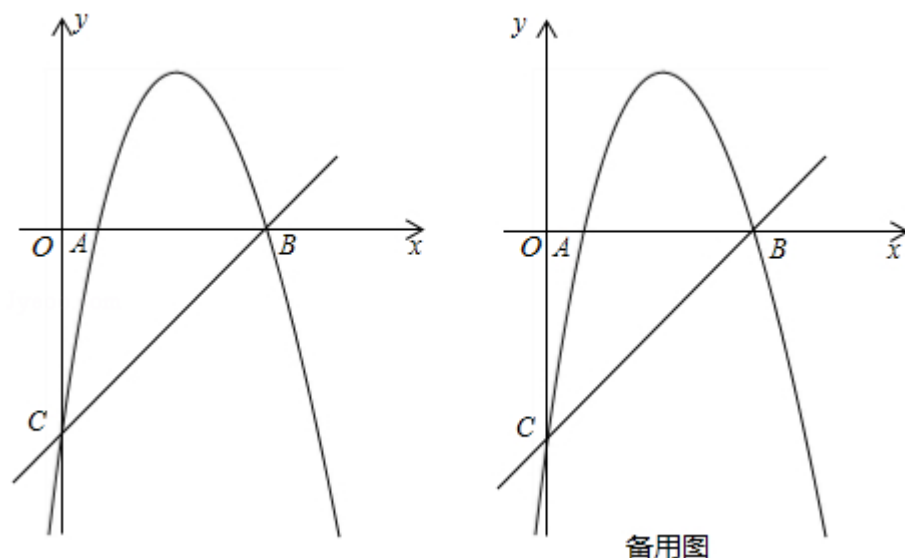
4. 如图, 抛物线  $y=ax^2+6x+c$  交  $x$  轴于  $A, B$  两点, 交  $y$  轴于点  $C$ . 直线  $y=x-5$  经过点  $B, C$ .

(1) 求抛物线的解析式;

(2) 过点  $A$  的直线交直线  $BC$  于点  $M$ .

①当  $AM \perp BC$  时, 过抛物线上一动点  $P$  (不与点  $B, C$  重合), 作直线  $AM$  的平行线交直线  $BC$  于点  $Q$ , 若以点  $A, M, P, Q$  为顶点的四边形是平行四边形, 求点  $P$  的横坐标;

②连接  $AC$ , 当直线  $AM$  与直线  $BC$  的夹角等于  $\angle ACB$  的 2 倍时, 请直接写出点  $M$  的坐标.

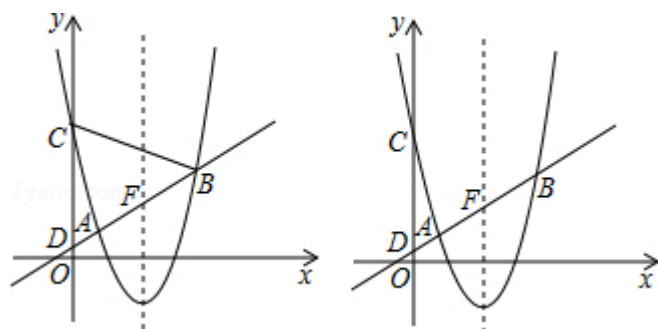


5. 如图，在平面直角坐标系  $xOy$  中，以直线  $x=\frac{5}{2}$  为对称轴的抛物线  $y=ax^2+bx+c$  与直线  $l: y=kx+m$  ( $k>0$ ) 交于  $A(1, 1)$ ,  $B$  两点，与  $y$  轴交于  $C(0, 5)$ ，直线  $l$  与  $y$  轴交于点  $D$ 。

(1) 求抛物线的函数表达式；

(2) 设直线  $l$  与抛物线的对称轴的交点为  $F$ ， $G$  是抛物线上位于对称轴右侧的一点，若  $\frac{AF}{FB}=\frac{3}{4}$ ，且  $\triangle BCG$  与  $\triangle BCD$  面积相等，求点  $G$  的坐标；

(3) 若在  $x$  轴上有且仅有一点  $P$ ，使  $\angle APB=90^\circ$ ，求  $k$  的值。

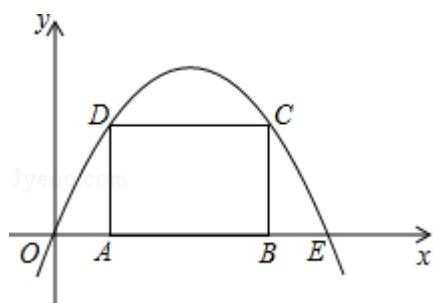


6. 如图，抛物线  $y=ax^2+bx$  ( $a<0$ ) 过点  $E(10, 0)$ ，矩形  $ABCD$  的边  $AB$  在线段  $OE$  上 (点  $A$  在点  $B$  的左边)，点  $C, D$  在抛物线上。设  $A(t, 0)$ ，当  $t=2$  时， $AD=4$ 。

(1) 求抛物线的函数表达式。

(2) 当  $t$  为何值时，矩形  $ABCD$  的周长有最大值？最大值是多少？

(3) 保持  $t=2$  时的矩形  $ABCD$  不动，向右平移抛物线。当平移后的抛物线与矩形的边有两个交点  $G, H$ ，且直线  $GH$  平分矩形的面积时，求抛物线平移的距离。



7. 抛物线  $L: y=-x^2+bx+c$  经过点  $A(0, 1)$ ，与它的对称轴直线  $x=1$  交于点  $B$ 。

(1) 直接写出抛物线  $L$  的解析式；

(2) 如图 1，过定点的直线  $y=kx-k+4$  ( $k<0$ ) 与抛物线  $L$  交于点  $M, N$ 。若  $\triangle BMN$  的面积等于 1，求  $k$  的值；

(3) 如图 2，将抛物线  $L$  向上平移  $m$  ( $m>0$ ) 个单位长度得到抛物线  $L_1$ ，抛物

线  $L_1$  与  $y$  轴交于点  $C$ ，过点  $C$  作  $y$  轴的垂线交抛物线  $L_1$  于另一点  $D$ 。  $F$  为抛物线  $L_1$  的对称轴与  $x$  轴的交点，  $P$  为线段  $OC$  上一点。 若  $\triangle PCD$  与  $\triangle POF$  相似，并且符合条件的点  $P$  恰有 2 个，求  $m$  的值及相应点  $P$  的坐标。

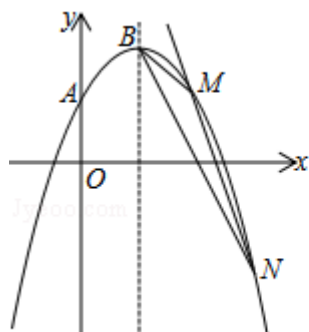


图 1

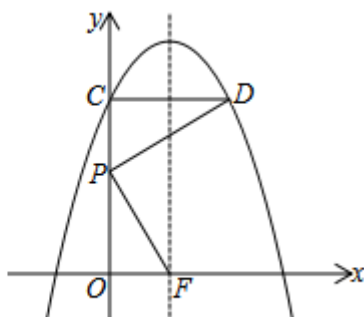


图 2

8. 在平面直角坐标系中，点  $O(0, 0)$ ，点  $A(1, 0)$ 。已知抛物线  $y = x^2 + mx - 2m$  ( $m$  是常数)，顶点为  $P$ 。

(I) 当抛物线经过点  $A$  时，求顶点  $P$  的坐标；

(II) 若点  $P$  在  $x$  轴下方，当  $\angle AOP = 45^\circ$  时，求抛物线的解析式；

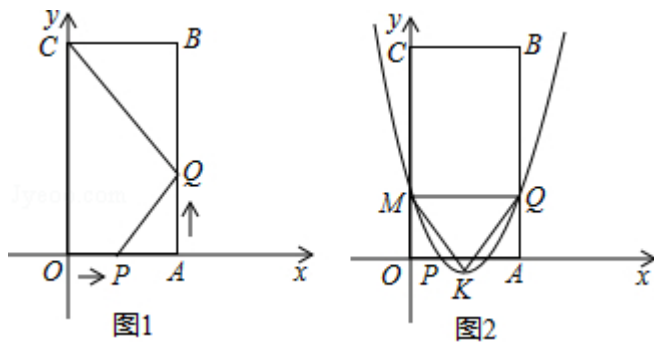
(III) 无论  $m$  取何值，该抛物线都经过定点  $H$ 。当  $\angle AHP = 45^\circ$  时，求抛物线的解析式。

9. 如图 1，四边形  $OABC$  是矩形，点  $A$  的坐标为  $(3, 0)$ ，点  $C$  的坐标为  $(0, 6)$ ，点  $P$  从点  $O$  出发，沿  $OA$  以每秒 1 个单位长度的速度向点  $A$  出发，同时点  $Q$  从点  $A$  出发，沿  $AB$  以每秒 2 个单位长度的速度向点  $B$  运动，当点  $P$  与点  $A$  重合时运动停止。设运动时间为  $t$  秒。

(1) 当  $t=2$  时，线段  $PQ$  的中点坐标为\_\_\_\_\_；

(2) 当  $\triangle CBQ$  与  $\triangle PAQ$  相似时，求  $t$  的值；

(3) 当  $t=1$  时，抛物线  $y = x^2 + bx + c$  经过  $P, Q$  两点，与  $y$  轴交于点  $M$ ，抛物线的顶点为  $K$ ，如图 2 所示，问该抛物线上是否存在点  $D$ ，使  $\angle MQD = \frac{1}{2} \angle MKQ$ ？若存在，求出所有满足条件的  $D$  的坐标；若不存在，说明理由。



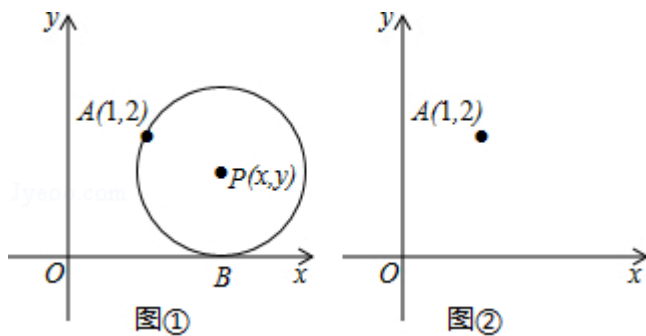
10. 如图①，在平面直角坐标系中，圆心为  $P(x, y)$  的动圆经过点  $A(1, 2)$  且与  $x$  轴相切于点  $B$ .

(1) 当  $x=2$  时，求  $\odot P$  的半径；

(2) 求  $y$  关于  $x$  的函数解析式，请判断此函数图象的形状，并在图②中画出此函数的图象；

(3) 请类比圆的定义（圆可以看成是到定点的距离等于定长的所有点的集合），给（2）中所得函数图象进行定义：此函数图象可以看成是到\_\_\_\_\_的距离等于到\_\_\_\_\_的距离的所有点的集合.

(4) 当  $\odot P$  的半径为 1 时，若  $\odot P$  与以上（2）中所得函数图象相交于点  $C$ 、 $D$ ，其中交点  $D(m, n)$  在点  $C$  的右侧，请利用图②，求  $\cos \angle APD$  的大小.



11. 已知顶点为  $A$  抛物线  $y=a(x-\frac{1}{2})^2-2$  经过点  $B(-\frac{3}{2}, 2)$ ，点  $C(\frac{5}{2}, 2)$ .

(1) 求抛物线的解析式；

(2) 如图 1，直线  $AB$  与  $x$  轴相交于点  $M$ ， $y$  轴相交于点  $E$ ，抛物线与  $y$  轴相交于点  $F$ ，在直线  $AB$  上有一点  $P$ ，若  $\angle OPM = \angle MAF$ ，求  $\triangle POE$  的面积；

(3) 如图 2，点  $Q$  是折线  $A-B-C$  上一点，过点  $Q$  作  $QN \parallel y$  轴，过点  $E$  作  $EN \parallel x$  轴，直线  $QN$  与直线  $EN$  相交于点  $N$ ，连接  $QE$ ，将  $\triangle QEN$  沿  $QE$  翻折得到  $\triangle QEN_1$ ，若点  $N_1$  落在  $x$  轴上，请直接写出  $Q$  点的坐标.

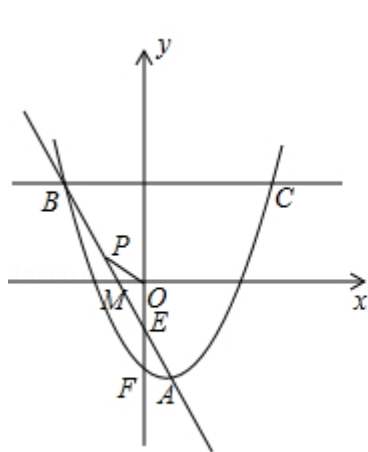


图1

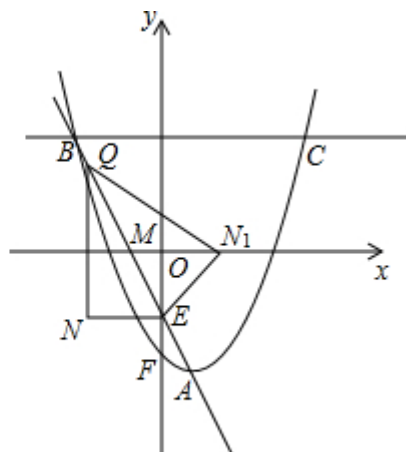


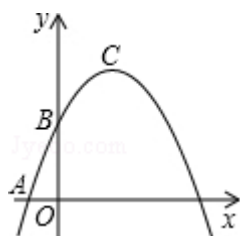
图2

12. 在平面直角坐标系  $xOy$  中 (如图). 已知抛物线  $y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$  经过点  $A(-1, 0)$  和点  $B(0, \frac{5}{2})$ , 顶点为  $C$ , 点  $D$  在其对称轴上且位于点  $C$  下方, 将线段  $DC$  绕点  $D$  按顺时针方向旋转  $90^\circ$ , 点  $C$  落在抛物线上的点  $P$  处.

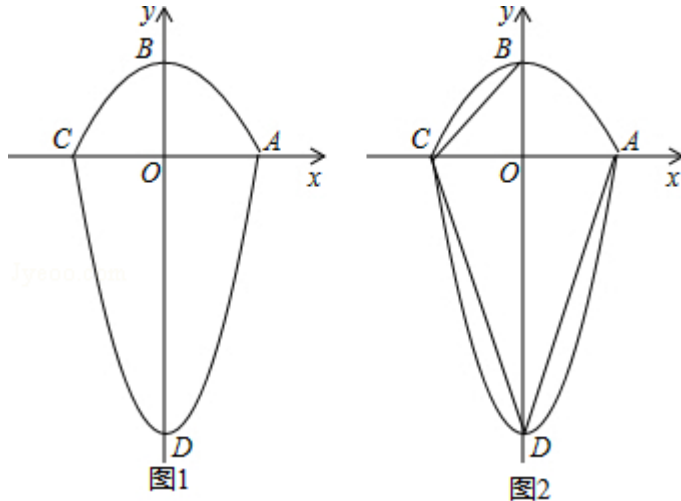
(1) 求这条抛物线的表达式;

(2) 求线段  $CD$  的长;

(3) 将抛物线平移, 使其顶点  $C$  移到原点  $O$  的位置, 这时点  $P$  落在点  $E$  的位置, 如果点  $M$  在  $y$  轴上, 且以  $O, D, E, M$  为顶点的四边形面积为  $8$ , 求点  $M$  的坐标.



13. 如图 1, 图形  $ABCD$  是由两个二次函数  $y_1 = kx^2 + m$  ( $k < 0$ ) 与  $y_2 = ax^2 + b$  ( $a > 0$ ) 的部分图象围成的封闭图形. 已知  $A(1, 0)$ 、 $B(0, 1)$ 、 $D(0, -3)$ .



(1) 直接写出这两个二次函数的表达式；

(2) 判断图形 ABCD 是否存在内接正方形（正方形的四个顶点在图形 ABCD 上），并说明理由；

(3) 如图 2，连接 BC，CD，AD，在坐标平面内，求使得  $\triangle BDC$  与  $\triangle ADE$  相似（其中点 C 与点 E 是对应顶点）的点 E 的坐标

14. 小贤与小杰在探究某类二次函数问题时，经历了如下过程：

求解体验：

(1) 已知抛物线  $y = -x^2 + bx - 3$  经过点  $(-1, 0)$ ，则  $b = \underline{\hspace{2cm}}$ ，顶点坐标为  $\underline{\hspace{2cm}}$ ，该抛物线关于点  $(0, 1)$  成中心对称的抛物线表达式是  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

抽象感悟：

我们定义：对于抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ )，以 y 轴上的点 M  $(0, m)$  为中心，作该抛物线关于点 M 对称的抛物线  $y'$ ，则我们又称抛物线  $y'$  为抛物线 y 的“衍生抛物线”，点 M 为“衍生中心”。

(2) 已知抛物线  $y = -x^2 - 2x + 5$  关于点  $(0, m)$  的衍生抛物线为  $y'$ ，若这两条抛物线有交点，求 m 的取值范围。

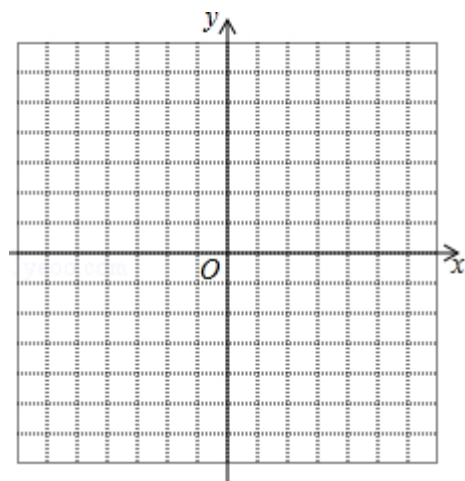
问题解决：

(3) 已知抛物线  $y = ax^2 + 2ax - b$  ( $a \neq 0$ )

①若抛物线 y 的衍生抛物线为  $y' = bx^2 - 2bx + a^2$  ( $b \neq 0$ )，两抛物线有两个交点，且恰好是它们的顶点，求 a、b 的值及衍生中心的坐标；

②若抛物线 y 关于点  $(0, k+1^2)$  的衍生抛物线为  $y_1$ ，其顶点为  $A_1$ ；关于点  $(0, k+2^2)$  的衍生抛物线为  $y_2$ ，其顶点为  $A_2$ ；...；关于点  $(0, k+n^2)$  的衍生抛物线为

$y_n$ ，其顶点为  $A_n$ ... ( $n$  为正整数). 求  $A_n A_{n+1}$  的长 (用含  $n$  的式子表示).

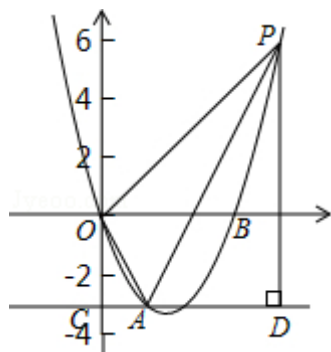


15. 如图，已知抛物线  $y=ax^2+bx$  ( $a \neq 0$ ) 过点  $A(\sqrt{3}, -3)$  和点  $B(3\sqrt{3}, 0)$ . 过点  $A$  作直线  $AC \parallel x$  轴，交  $y$  轴于点  $C$ .

(1) 求抛物线的解析式;

(2) 在抛物线上取一点  $P$ ，过点  $P$  作直线  $AC$  的垂线，垂足为  $D$ . 连接  $OA$ ，使得以  $A, D, P$  为顶点的三角形与  $\triangle AOC$  相似，求出对应点  $P$  的坐标;

(3) 抛物线上是否存在点  $Q$ ，使得  $S_{\triangle AOC} = \frac{1}{3} S_{\triangle AOQ}$ ? 若存在，求出点  $Q$  的坐标; 若不存在，请说明理由.

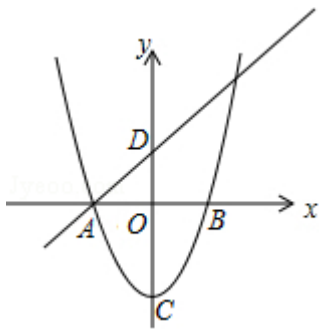


16. 如图，已知抛物线  $y=x^2-4$  与  $x$  轴交于点  $A, B$  (点  $A$  位于点  $B$  的左侧)， $C$  为顶点，直线  $y=x+m$  经过点  $A$ ，与  $y$  轴交于点  $D$ .

(1) 求线段  $AD$  的长;

(2) 平移该抛物线得到一条新抛物线，设新抛物线的顶点为  $C'$ . 若新抛物线经过点  $D$ ，并且新抛物线的顶点和原抛物线的顶点的连线  $CC'$  平行于直线  $AD$ ，求新抛物线对应的函数表达式.





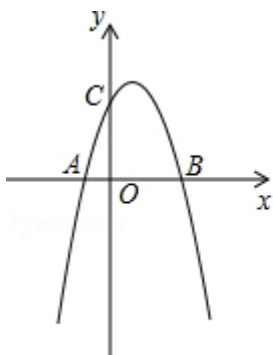
17. 如图①，在平面直角坐标系  $xOy$  中，抛物线  $y = ax^2 + bx + 3$  经过点  $A(-1, 0)$ 、 $B(3, 0)$  两点，且与  $y$  轴交于点  $C$ 。

(1) 求抛物线的表达式；

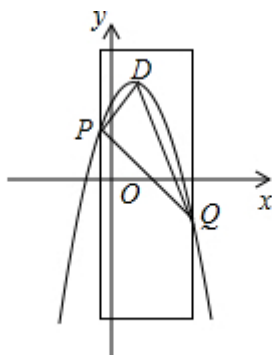
(2) 如图②，用宽为 4 个单位长度的直尺垂直于  $x$  轴，并沿  $x$  轴左右平移，直尺的左右两边所在的直线与抛物线相交于  $P$ 、 $Q$  两点（点  $P$  在点  $Q$  的左侧），连接  $PQ$ ，在线段  $PQ$  上方抛物线上有一动点  $D$ ，连接  $DP$ 、 $DQ$ 。

(1) 若点  $P$  的横坐标为  $-\frac{1}{2}$ ，求  $\triangle DPQ$  面积的最大值，并求此时点  $D$  的坐标；

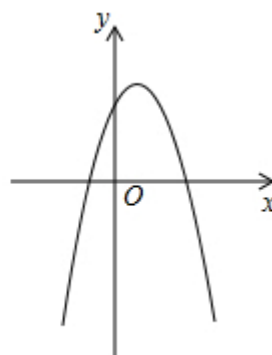
(II) 直尺在平移过程中， $\triangle DPQ$  面积是否有最大值？若有，求出面积的最大值；若没有，请说明理由。



图①



图②



备用图

18. 已知抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  过点  $A(0, 2)$ 。

(1) 若点  $(-\sqrt{2}, 0)$  也在该抛物线上，求  $a$ ， $b$  满足的关系式；

(2) 若该抛物线上任意不同两点  $M(x_1, y_1)$ ， $N(x_2, y_2)$  都满足：当  $x_1 < x_2 < 0$  时， $(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) > 0$ ；当  $0 < x_1 < x_2$  时， $(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) < 0$ 。以原点  $O$  为心， $OA$  为半径的圆与抛物线的另两个交点为  $B$ ， $C$ ，且  $\triangle ABC$  有一个内角为  $60^\circ$ 。

①求抛物线的解析式；

②若点  $P$  与点  $O$  关于点  $A$  对称，且  $O$ ， $M$ ， $N$  三点共线，求证： $PA$  平分  $\angle MPN$ 。

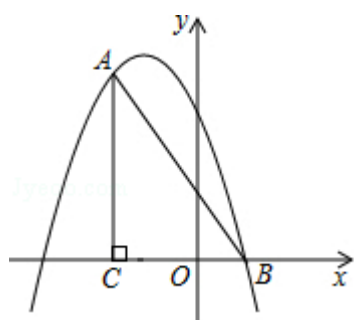
19. 如图，在平面直角坐标系中， $\angle ACB=90^\circ$ ， $OC=2OB$ ， $\tan \angle ABC=2$ ，点 B 的坐标为  $(1, 0)$ 。抛物线  $y=-x^2+bx+c$  经过 A、B 两点。

(1) 求抛物线的解析式；

(2) 点 P 是直线 AB 上方抛物线上的一点，过点 P 作 PD 垂直 x 轴于点 D，交线段 AB 于点 E，使  $PE=\frac{1}{2}DE$ 。

①求点 P 的坐标；

②在直线 PD 上是否存在点 M，使  $\triangle ABM$  为直角三角形？若存在，求出符合条件的所有点 M 的坐标；若不存在，请说明理由。



20. 我们不妨约定：对角线互相垂直的凸四边形叫做“十字形”。

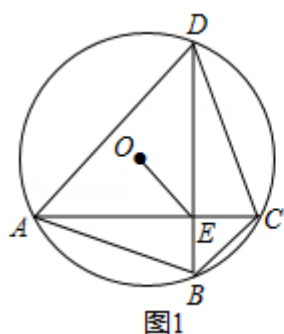


图1

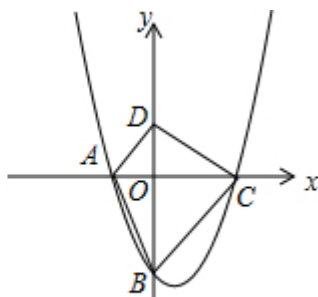


图2

(1) ①在“平行四边形，矩形，菱形，正方形”中，一定是“十字形”的有\_\_\_\_\_；

②在凸四边形 ABCD 中， $AB=AD$  且  $CB \neq CD$ ，则该四边形\_\_\_\_\_“十字形”。(填“是”或“不是”)

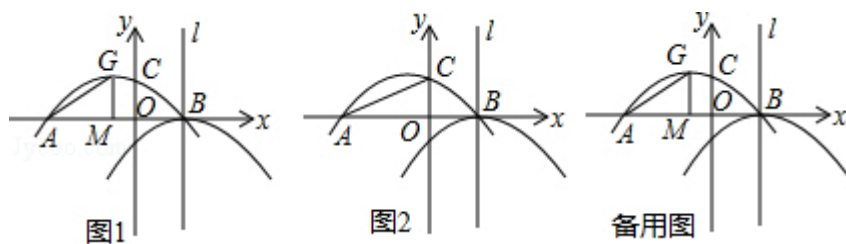
(2) 如图 1，A，B，C，D 是半径为 1 的  $\odot O$  上按逆时针方向排列的四个动点，AC 与 BD 交于点 E， $\angle ADB - \angle CDB = \angle ABD - \angle CBD$ ，当  $6 \leq AC^2 + BD^2 \leq 7$  时，求 OE 的取值范围；

(3) 如图 2，在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线  $y=ax^2+bx+c$  ( $a, b, c$  为常数， $a>0, c<0$ ) 与 x 轴交于 A，C 两点 (点 A 在点 C 的左侧)，B 是抛物线与 y 轴的交点，点 D 的坐标为  $(0, -ac)$ ，记“十字形”ABCD 的面积为 S，记  $\triangle AOB$ ， $\triangle COD$ ，

$\triangle AOD$ ,  $\triangle BOC$  的面积分别为  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ ,  $S_4$ . 求同时满足下列三个条件的抛物线的解析式;

①  $\sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}$ ; ②  $\sqrt{S} = \sqrt{S_3} + \sqrt{S_4}$ ; ③ “十字形”ABCD 的周长为  $12\sqrt{10}$ .

21. 如图 1, 抛物线  $y_1 = ax^2 - \frac{1}{2}x + c$  与  $x$  轴交于点 A 和点 B (1, 0), 与  $y$  轴交于点 C (0,  $\frac{3}{4}$ ), 抛物线  $y_1$  的顶点为 G,  $GM \perp x$  轴于点 M. 将抛物线  $y_1$  平移后得到顶点为 B 且对称轴为直线  $l$  的抛物线  $y_2$ .



(1) 求抛物线  $y_2$  的解析式;

(2) 如图 2, 在直线  $l$  上是否存在点 T, 使  $\triangle TAC$  是等腰三角形? 若存在, 请求出所有点 T 的坐标; 若不存在, 请说明理由;

(3) 点 P 为抛物线  $y_1$  上一动点, 过点 P 作  $y$  轴的平行线交抛物线  $y_2$  于点 Q, 点 Q 关于直线  $l$  的对称点为 R, 若以 P, Q, R 为顶点的三角形与  $\triangle AMG$  全等, 求直线 PR 的解析式.

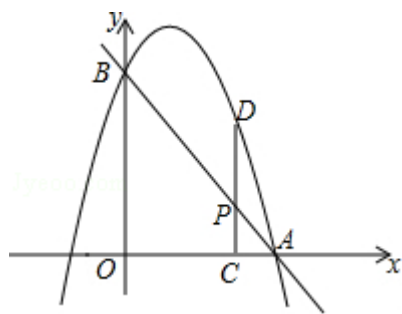
22. 如图, 已知直线  $y = -2x + 4$  分别交  $x$  轴、 $y$  轴于点 A、B, 抛物线过 A, B 两点, 点 P 是线段 AB 上一动点, 过点 P 作  $PC \perp x$  轴于点 C, 交抛物线于点 D.

(1) 若抛物线的解析式为  $y = -2x^2 + 2x + 4$ , 设其顶点为 M, 其对称轴交 AB 于点 N.

① 求点 M、N 的坐标;

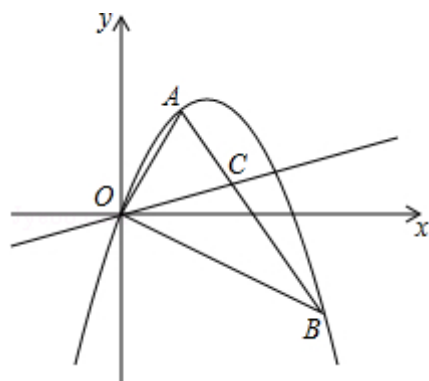
② 是否存在点 P, 使四边形 MNPD 为菱形? 并说明理由;

(2) 当点 P 的横坐标为 1 时, 是否存在这样的抛物线, 使得以 B、P、D 为顶点的三角形与  $\triangle AOB$  相似? 若存在, 求出满足条件的抛物线的解析式; 若不存在, 请说明理由.



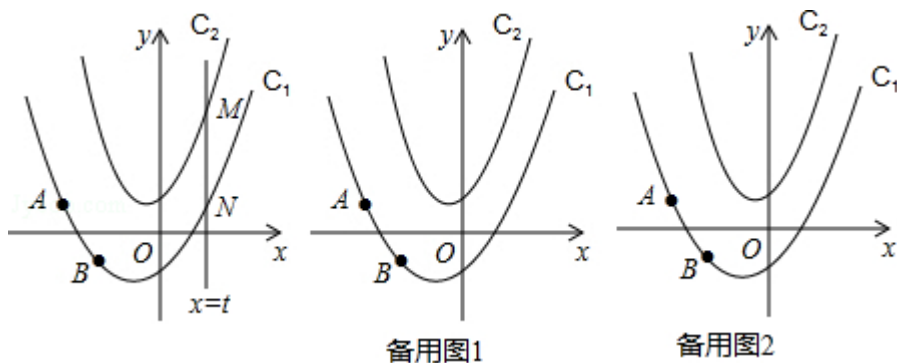
23. 如图，抛物线  $y=ax^2+bx$  经过  $\triangle OAB$  的三个顶点，其中点  $A(1, \sqrt{3})$ ，点  $B(3, -\sqrt{3})$ ， $O$  为坐标原点.

- (1) 求这条抛物线所对应的函数表达式；
- (2) 若  $P(4, m)$ ， $Q(t, n)$  为该抛物线上的两点，且  $n < m$ ，求  $t$  的取值范围；
- (3) 若  $C$  为线段  $AB$  上的一个动点，当点  $A$ ，点  $B$  到直线  $OC$  的距离之和最大时，求  $\angle BOC$  的大小及点  $C$  的坐标.



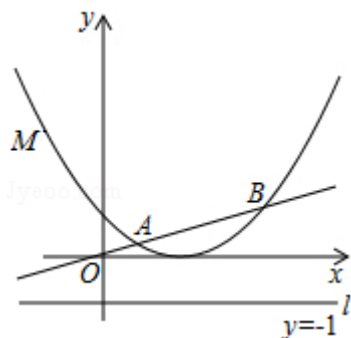
24. 如图，在平面直角坐标系中，抛物线  $C_1: y=ax^2+bx-1$  经过点  $A(-2, 1)$  和点  $B(-1, -1)$ ，抛物线  $C_2: y=2x^2+x+1$ ，动直线  $x=t$  与抛物线  $C_1$  交于点  $N$ ，与抛物线  $C_2$  交于点  $M$ .

- (1) 求抛物线  $C_1$  的表达式；
- (2) 直接用含  $t$  的代数式表示线段  $MN$  的长；
- (3) 当  $\triangle AMN$  是以  $MN$  为直角边的等腰直角三角形时，求  $t$  的值；
- (4) 在 (3) 的条件下，设抛物线  $C_1$  与  $y$  轴交于点  $P$ ，点  $M$  在  $y$  轴右侧的抛物线  $C_2$  上，连接  $AM$  交  $y$  轴于点  $K$ ，连接  $KN$ ，在平面内有一点  $Q$ ，连接  $KQ$  和  $QN$ ，当  $KQ=1$  且  $\angle KNQ = \angle BNP$  时，请直接写出点  $Q$  的坐标.



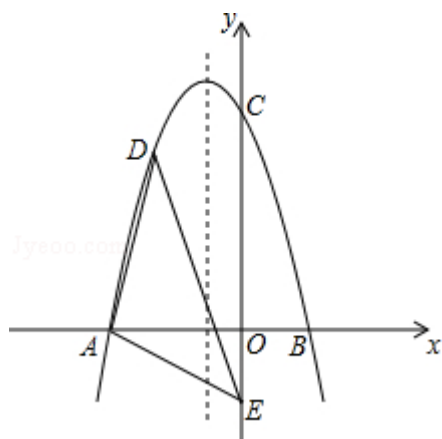
25. 在平面直角坐标系  $xOy$  中，已知抛物线的顶点坐标为  $(2, 0)$ ，且经过点  $(4, 1)$ ，如图，直线  $y = \frac{1}{4}x$  与抛物线交于  $A$ 、 $B$  两点，直线  $l$  为  $y = -1$ 。

- (1) 求抛物线的解析式；
- (2) 在  $l$  上是否存在一点  $P$ ，使  $PA+PB$  取得最小值？若存在，求出点  $P$  的坐标；若不存在，请说明理由。
- (3) 知  $F(x_0, y_0)$  为平面内一定点， $M(m, n)$  为抛物线上一动点，且点  $M$  到直线  $l$  的距离与点  $M$  到点  $F$  的距离总是相等，求定点  $F$  的坐标。



26. 如图，在平面直角坐标系中，二次函数  $y = ax^2 + bx + c$  交  $x$  轴于点  $A(-4, 0)$ 、 $B(2, 0)$ ，交  $y$  轴于点  $C(0, 6)$ ，在  $y$  轴上有一点  $E(0, -2)$ ，连接  $AE$ 。

- (1) 求二次函数的表达式；
- (2) 若点  $D$  为抛物线在  $x$  轴负半轴上方的一个动点，求  $\triangle ADE$  面积的最大值；
- (3) 抛物线对称轴上是否存在点  $P$ ，使  $\triangle AEP$  为等腰三角形？若存在，请直接写出所有  $P$  点的坐标，若不存在请说明理由。



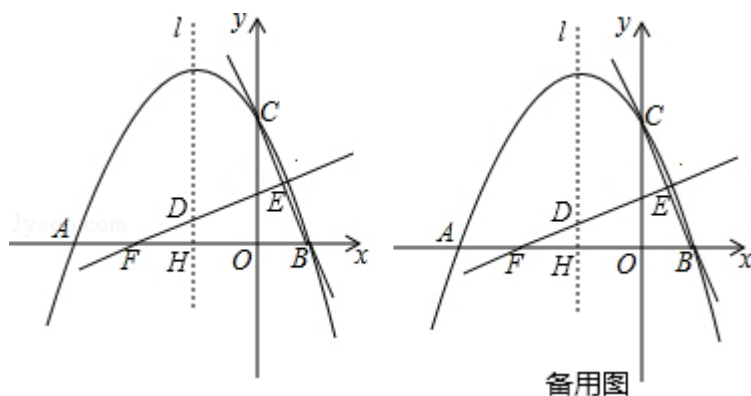
27. 如图，抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) 与  $x$  轴交于点  $A(-4, 0)$ ,  $B(2, 0)$ ，与  $y$  轴交于点  $C(0, 4)$ ，线段  $BC$  的中垂线与对称轴  $l$  交于点  $D$ ，与  $x$  轴交于点  $F$ ，与  $BC$  交于点  $E$ ，对称轴  $l$  与  $x$  轴交于点  $H$ 。

(1) 求抛物线的函数表达式；

(2) 求点  $D$  的坐标；

(3) 点  $P$  为  $x$  轴上一点， $\odot P$  与直线  $BC$  相切于点  $Q$ ，与直线  $DE$  相切于点  $R$ 。求点  $P$  的坐标；

(4) 点  $M$  为  $x$  轴上方抛物线上的点，在对称轴  $l$  上是否存在一点  $N$ ，使得以点  $D, P, M, N$  为顶点的四边形是平行四边形？若存在，则直接写出  $N$  点坐标；若不存在，请说明理由。

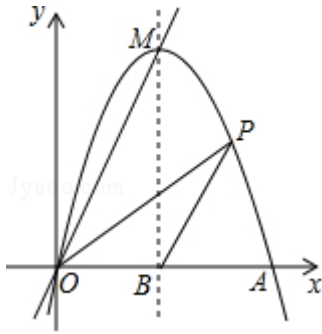


28. 如图，抛物线  $y = ax^2 + bx$  ( $a \neq 0$ ) 交  $x$  轴正半轴于点  $A$ ，直线  $y = 2x$  经过抛物线的顶点  $M$ 。已知该抛物线的对称轴为直线  $x = 2$ ，交  $x$  轴于点  $B$ 。

(1) 求  $a, b$  的值。

(2)  $P$  是第一象限内抛物线上的一点，且在对称轴的右侧，连接  $OP, BP$ 。设点  $P$  的横坐标为  $m$ ， $\triangle OBP$  的面积为  $S$ ，记  $K = \frac{S}{m}$ 。求  $K$  关于  $m$  的函数表达式及  $K$  的

范围.



29. 抛物线  $y = -\frac{\sqrt{6}}{6}x^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{6}$  与  $x$  轴交于点  $A, B$  (点  $A$  在点  $B$  的左边), 与  $y$  轴交于点  $C$ , 点  $D$  是该抛物线的顶点.

(1) 如图 1, 连接  $CD$ , 求线段  $CD$  的长;

(2) 如图 2, 点  $P$  是直线  $AC$  上方抛物线上一点,  $PF \perp x$  轴于点  $F$ ,  $PF$  与线段  $AC$  交于点  $E$ ; 将线段  $OB$  沿  $x$  轴左右平移, 线段  $OB$  的对应线段是  $O_1B_1$ , 当  $PE + \frac{1}{2}EC$  的值最大时, 求四边形  $PO_1B_1C$  周长的最小值, 并求出对应的点  $O_1$  的坐标;

(3) 如图 3, 点  $H$  是线段  $AB$  的中点, 连接  $CH$ , 将  $\triangle OBC$  沿直线  $CH$  翻折至  $\triangle O_2B_2C$  的位置, 再将  $\triangle O_2B_2C$  绕点  $B_2$  旋转一周, 在旋转过程中, 点  $O_2, C$  的对应点分别是点  $O_3, C_1$ , 直线  $O_3C_1$  分别与直线  $AC, x$  轴交于点  $M, N$ . 那么, 在  $\triangle O_2B_2C$  的整个旋转过程中, 是否存在恰当的位置, 使  $\triangle AMN$  是以  $MN$  为腰的等腰三角形? 若存在, 请直接写出所有符合条件的线段  $O_2M$  的长; 若不存在, 请说明理由.

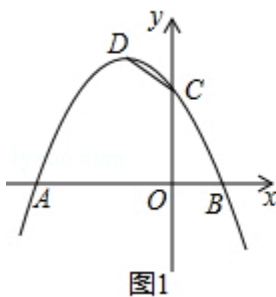


图1

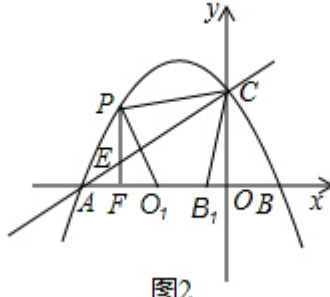


图2

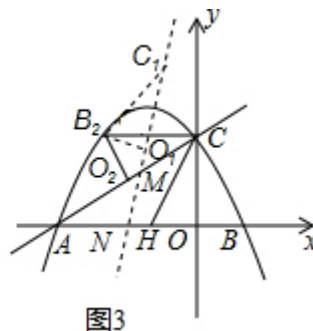
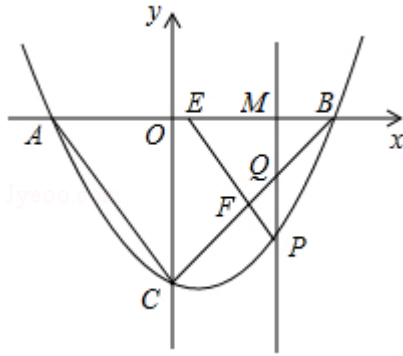


图3

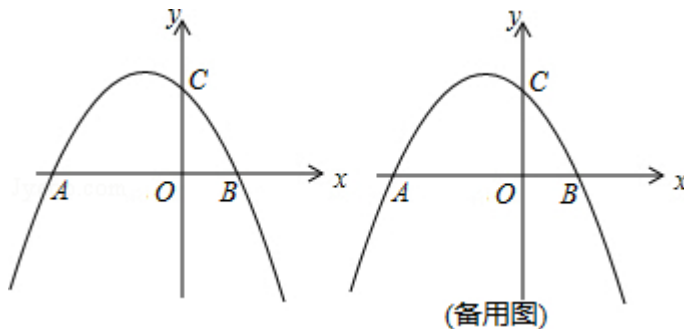
30. 综合与探究

如图, 抛物线  $y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - 4$  与  $x$  轴交于  $A, B$  两点 (点  $A$  在点  $B$  的左侧), 与  $y$  轴交于点  $C$ , 连接  $AC, BC$ . 点  $P$  是第四象限内抛物线上的一个动点, 点  $P$  的横坐标为  $m$ , 过点  $P$  作  $PM \perp x$  轴, 垂足为点  $M$ ,  $PM$  交  $BC$  于点  $Q$ , 过点  $P$  作  $PE \parallel AC$  交  $x$  轴于点  $E$ , 交  $BC$  于点  $F$ .

- (1) 求 A, B, C 三点的坐标;
- (2) 试探究在点 P 运动的过程中, 是否存在这样的点 Q, 使得以 A, C, Q 为顶点的三角形是等腰三角形. 若存在, 请直接写出此时点 Q 的坐标; 若不存在, 请说明理由;
- (3) 请用含 m 的代数式表示线段 QF 的长, 并求出 m 为何值时 QF 有最大值.

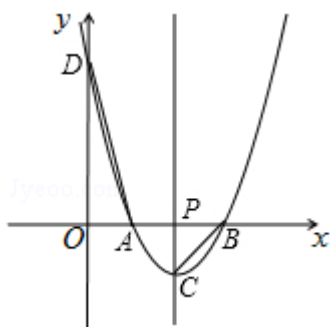


31. 如图, 二次函数  $y = -\frac{1}{3}x^2 + bx + 2$  的图象与  $x$  轴交于点 A、B, 与  $y$  轴交于点 C, 点 A 的坐标为  $(-4, 0)$ , P 是抛物线上一点 (点 P 与点 A、B、C 不重合).
- (1)  $b = \underline{\hspace{2cm}}$ , 点 B 的坐标是  $\underline{\hspace{2cm}}$ ;
- (2) 设直线 PB 与直线 AC 相交于点 M, 是否存在这样的点 P, 使得  $PM: MB = 1: 2$ ? 若存在, 求出点 P 的横坐标; 若不存在, 请说明理由;
- (3) 连接 AC、BC, 判断  $\angle CAB$  和  $\angle CBA$  的数量关系, 并说明理由.



32. 如图，在平面直角坐标系中，二次函数  $y = (x - a)(x - 3)$  ( $0 < a < 3$ ) 的图象与  $x$  轴交于点  $A$ 、 $B$  (点  $A$  在点  $B$  的左侧)，与  $y$  轴交于点  $D$ ，过其顶点  $C$  作直线  $CP \perp x$  轴，垂足为点  $P$ ，连接  $AD$ 、 $BC$ 。
- (1) 求点  $A$ 、 $B$ 、 $D$  的坐标；
- (2) 若  $\triangle AOD$  与  $\triangle BPC$  相似，求  $a$  的值；
- (3) 点  $D$ 、 $O$ 、 $C$ 、 $B$  能否在同一个圆上？若能，求出  $a$  的值；若不能，请说明理由。



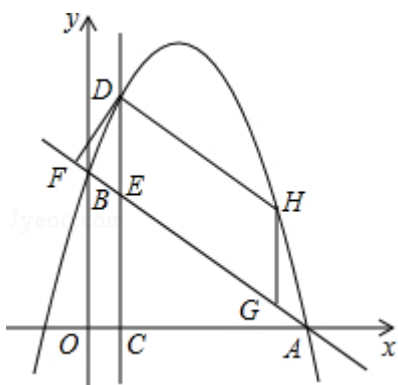


33. 如图，已知二次函数  $y=ax^2 - (2a - \frac{3}{4})x + 3$  的图象经过点  $A(4, 0)$ ，与  $y$  轴交于点  $B$ 。在  $x$  轴上有一动点  $C(m, 0)$  ( $0 < m < 4$ )，过点  $C$  作  $x$  轴的垂线交直线  $AB$  于点  $E$ ，交该二次函数图象于点  $D$ 。

(1) 求  $a$  的值和直线  $AB$  的解析式；

(2) 过点  $D$  作  $DF \perp AB$  于点  $F$ ，设  $\triangle ACE$ ， $\triangle DEF$  的面积分别为  $S_1$ ， $S_2$ ，若  $S_1 = 4S_2$ ，求  $m$  的值；

(3) 点  $H$  是该二次函数图象上位于第一象限的动点，点  $G$  是线段  $AB$  上的动点，当四边形  $DEGH$  是平行四边形，且  $\square DEGH$  周长取最大值时，求点  $G$  的坐标。

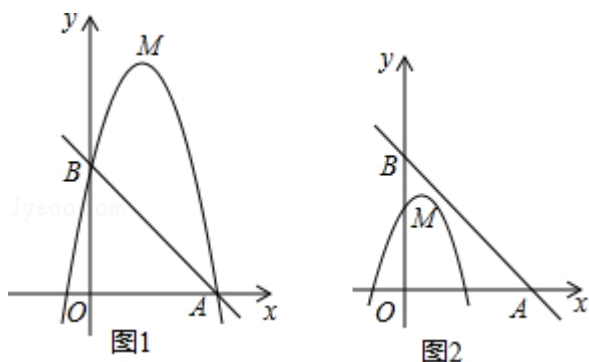


34. 已知，点  $M$  为二次函数  $y = -(x - b)^2 + 4b + 1$  图象的顶点，直线  $y = mx + 5$  分别交  $x$  轴正半轴， $y$  轴于点  $A$ ， $B$ 。

(1) 判断顶点  $M$  是否在直线  $y = 4x + 1$  上，并说明理由。

(2) 如图 1，若二次函数图象也经过点  $A$ ， $B$ ，且  $mx + 5 > -(x - b)^2 + 4b + 1$ ，根据图象，写出  $x$  的取值范围。

(3) 如图 2，点  $A$  坐标为  $(5, 0)$ ，点  $M$  在  $\triangle AOB$  内，若点  $C(\frac{1}{4}, y_1)$ ， $D(\frac{3}{4}, y_2)$  都在二次函数图象上，试比较  $y_1$  与  $y_2$  的大小。

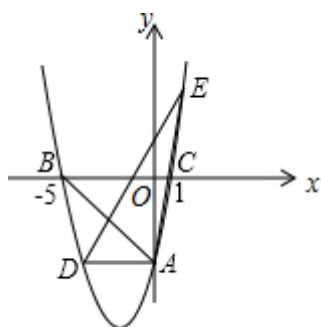


35. 如图，在平面直角坐标系中，抛物线  $y=ax^2+bx-5$  交  $y$  轴于点 A，交  $x$  轴于点 B（-5，0）和点 C（1，0），过点 A 作  $AD \parallel x$  轴交抛物线于点 D.

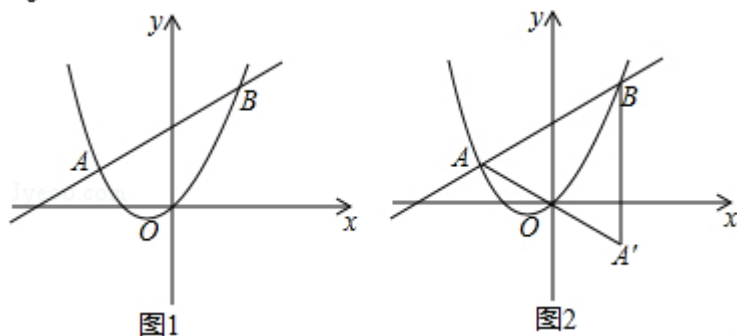
（1）求此抛物线的表达式；

（2）点 E 是抛物线上一点，且点 E 关于  $x$  轴的对称点在直线 AD 上，求  $\triangle EAD$  的面积；

（3）若点 P 是直线 AB 下方的抛物线上一动点，当点 P 运动到某一位置时， $\triangle ABP$  的面积最大，求出此时点 P 的坐标和  $\triangle ABP$  的最大面积.



36. 已知抛物线 F:  $y=x^2+bx+c$  的图象经过坐标原点 O，且与  $x$  轴另一交点为  $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0)$ .



（1）求抛物线 F 的解析式；

（2）如图 1，直线  $l: y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+m$  ( $m>0$ ) 与抛物线 F 相交于点 A ( $x_1, y_1$ ) 和点 B ( $x_2, y_2$ ) (点 A 在第二象限)，求  $y_2 - y_1$  的值 (用含 m 的式子表示)；

(3) 在(2)中, 若  $m = \frac{4}{3}$ , 设点  $A'$  是点  $A$  关于原点  $O$  的对称点, 如图 2.

①判断  $\triangle AA'B$  的形状, 并说明理由;

②平面内是否存在点  $P$ , 使得以点  $A$ 、 $B$ 、 $A'$ 、 $P$  为顶点的四边形是菱形? 若存在, 求出点  $P$  的坐标; 若不存在, 请说明理由.

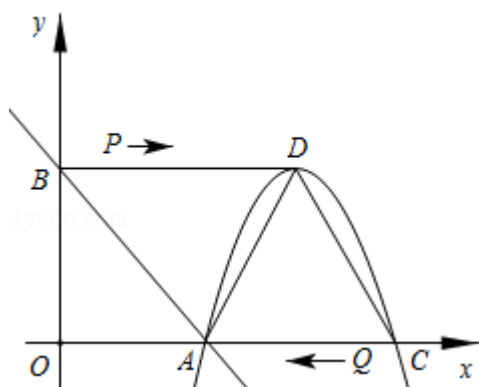
37. 直线  $y = -\frac{3}{2}x + 3$  交  $x$  轴于点  $A$ , 交  $y$  轴于点  $B$ , 顶点为  $D$  的抛物线  $y = -\frac{3}{4}x^2 + 2mx - 3m$  经过点  $A$ , 交  $x$  轴于另一点  $C$ , 连接  $BD$ ,  $AD$ ,  $CD$ , 如图所示.

(1) 直接写出抛物线的解析式和点  $A$ ,  $C$ ,  $D$  的坐标;

(2) 动点  $P$  在  $BD$  上以每秒 2 个单位长的速度由点  $B$  向点  $D$  运动, 同时动点  $Q$  在  $CA$  上以每秒 3 个单位长的速度由点  $C$  向点  $A$  运动, 当其中一个点到达终点停止运动时, 另一个点也随之停止运动, 设运动时间为  $t$  秒.  $PQ$  交线段  $AD$  于点  $E$ .

①当  $\angle DPE = \angle CAD$  时, 求  $t$  的值;

②过点  $E$  作  $EM \perp BD$ , 垂足为点  $M$ , 过点  $P$  作  $PN \perp BD$  交线段  $AB$  或  $AD$  于点  $N$ , 当  $PN = EM$  时, 求  $t$  的值.



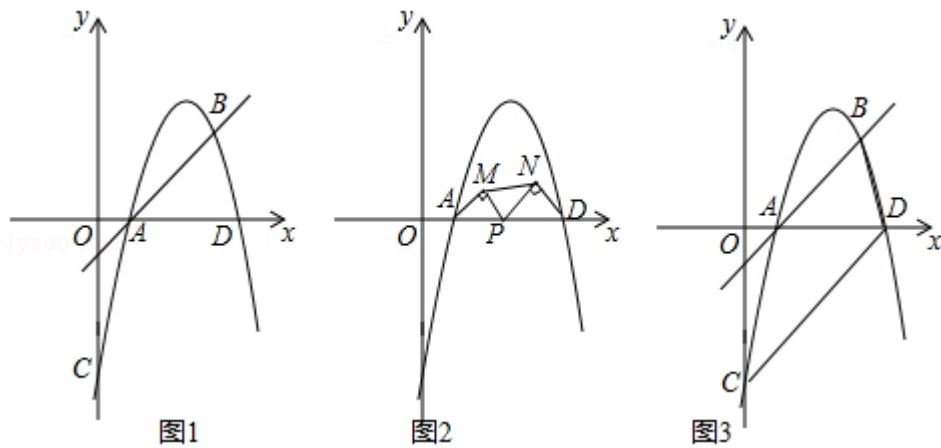
38. 如图 1, 在平面直角坐标系中, 直线  $y = x - 1$  与抛物线  $y = -x^2 + bx + c$  交于  $A$ 、 $B$  两点, 其中  $A(m, 0)$ 、 $B(4, n)$ , 该抛物线与  $y$  轴交于点  $C$ , 与  $x$  轴交于另一点  $D$ .

(1) 求  $m$ 、 $n$  的值及该抛物线的解析式;

(2) 如图 2, 若点  $P$  为线段  $AD$  上的一动点 (不与  $A$ 、 $D$  重合), 分别以  $AP$ 、 $DP$  为斜边, 在直线  $AD$  的同侧作等腰直角  $\triangle APM$  和等腰直角  $\triangle DPN$ , 连接  $MN$ , 试确定  $\triangle MPN$  面积最大时  $P$  点的坐标;

(3) 如图 3, 连接  $BD$ 、 $CD$ , 在线段  $CD$  上是否存在点  $Q$ , 使得以  $A$ 、 $D$ 、 $Q$  为顶点的三角形与  $\triangle ABD$  相似, 若存在, 请直接写出点  $Q$  的坐标; 若不存在, 请说

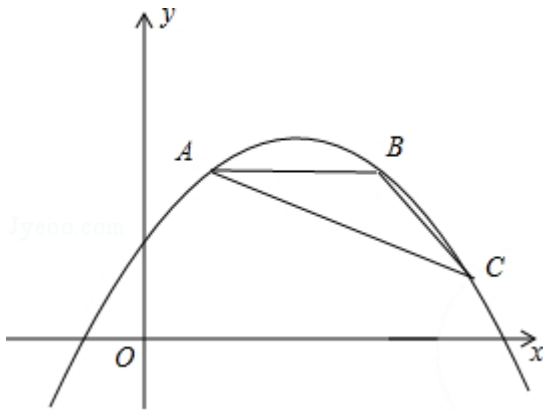
明理由.



39. 如图, 点 A, B, C 都在抛物线  $y = ax^2 - 2amx + am^2 + 2m - 5$  (其中  $-\frac{1}{4} < a < 0$ )

上,  $AB \parallel x$  轴,  $\angle ABC = 135^\circ$ , 且  $AB = 4$ .

- (1) 填空: 抛物线的顶点坐标为\_\_\_\_\_ (用含  $m$  的代数式表示);
- (2) 求  $\triangle ABC$  的面积 (用含  $a$  的代数式表示);
- (3) 若  $\triangle ABC$  的面积为 2, 当  $2m - 5 \leq x \leq 2m - 2$  时,  $y$  的最大值为 2, 求  $m$  的值.



40. 如图 1, 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 已知点 A 和点 B 的坐标分别为  $A(-2, 0)$ ,  $B(0, -6)$ , 将  $Rt\triangle AOB$  绕点 O 按顺时针方向分别旋转  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  得到  $Rt\triangle A_1OC$ ,  $Rt\triangle EOF$ . 抛物线  $C_1$  经过点 C, A, B; 抛物线  $C_2$  经过点 C, E, F.

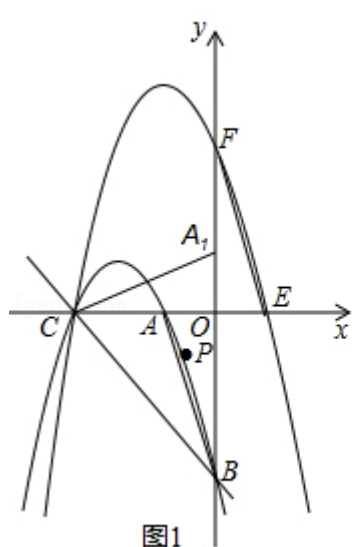


图1

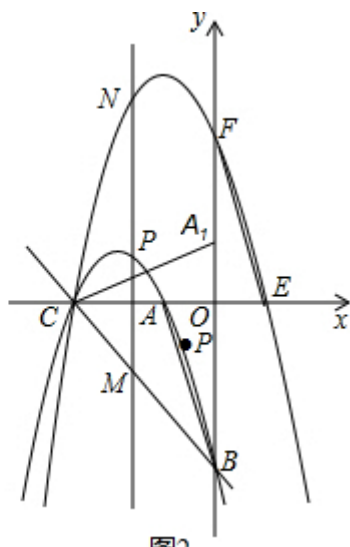


图2

(1) 点 C 的坐标为\_\_\_\_\_，点 E 的坐标为\_\_\_\_\_；抛物线  $C_1$  的解析式为\_\_\_\_\_．抛物线  $C_2$  的解析式为\_\_\_\_\_；

(2) 如果点  $P(x, y)$  是直线 BC 上方抛物线  $C_1$  上的一个动点．

①若  $\angle PCA = \angle ABO$  时，求 P 点的坐标；

②如图 2，过点 P 作 x 轴的垂线交直线 BC 于点 M，交抛物线  $C_2$  于点 N，记  $h = PM + NM + \sqrt{2}BM$ ，求 h 与 x 的函数关系式，当  $-5 \leq x \leq -2$  时，求 h 的取值范围．

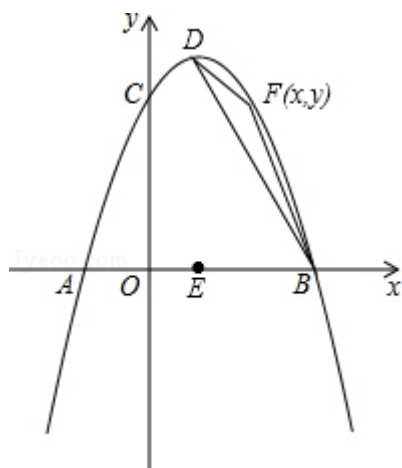
41. 如图，抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  与两坐标轴相交于点 A  $(-1, 0)$ 、B  $(3, 0)$ 、C  $(0, 3)$ ，D 是抛物线的顶点，E 是线段 AB 的中点．

(1) 求抛物线的解析式，并写出 D 点的坐标；

(2) F  $(x, y)$  是抛物线上的动点：

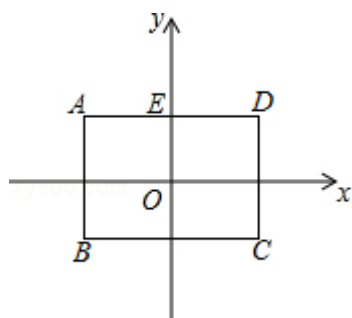
①当  $x > 1$ ， $y > 0$  时，求  $\triangle BDF$  的面积的最大值；

②当  $\angle AEF = \angle DBE$  时，求点 F 的坐标．



42. 如图，在平面直角坐标系中，矩形  $ABCD$  的对称中心为坐标原点  $O$ ， $AD \perp y$  轴于点  $E$ （点  $A$  在点  $D$  的左侧），经过  $E$ 、 $D$  两点的函数  $y = -\frac{1}{2}x^2 + mx + 1$  ( $x \geq 0$ ) 的图象记为  $G_1$ ，函数  $y = -\frac{1}{2}x^2 - mx - 1$  ( $x < 0$ ) 的图象记为  $G_2$ ，其中  $m$  是常数，图象  $G_1$ 、 $G_2$  合起来得到的图象记为  $G$ 。设矩形  $ABCD$  的周长为  $L$ 。

- (1) 当点  $A$  的横坐标为  $-1$  时，求  $m$  的值；
- (2) 求  $L$  与  $m$  之间的函数关系式；
- (3) 当  $G_2$  与矩形  $ABCD$  恰好有两个公共点时，求  $L$  的值；
- (4) 设  $G$  在  $-4 \leq x \leq 2$  上最高点的纵坐标为  $y_0$ ，当  $\frac{3}{2} \leq y_0 \leq 9$  时，直接写出  $L$  的取值范围。



43. 已知抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  过点  $A(0, 2)$ ，且抛物线上任意不同两点  $M(x_1, y_1)$ ， $N(x_2, y_2)$  都满足：当  $x_1 < x_2 < 0$  时， $(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) > 0$ ；当  $0 < x_1 < x_2$  时， $(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) < 0$ 。以原点  $O$  为圆心， $OA$  为半径的圆与抛物线的另两个交点为  $B$ ， $C$ ，且  $B$  在  $C$  的左侧， $\triangle ABC$  有一个内角为  $60^\circ$ 。

- (1) 求抛物线的解析式；
- (2) 若  $MN$  与直线  $y = -2\sqrt{3}x$  平行，且  $M$ ， $N$  位于直线  $BC$  的两侧， $y_1 > y_2$ ，解

决以下问题：

①求证：BC 平分  $\angle MBN$ ；

②求  $\triangle MBC$  外心的纵坐标的取值范围.

44. 如图，抛物线  $y=x^2+bx+c$  与  $x$  轴交于 A、B 两点，B 点坐标为  $(4, 0)$ ，与  $y$  轴交于点 C  $(0, 4)$ .

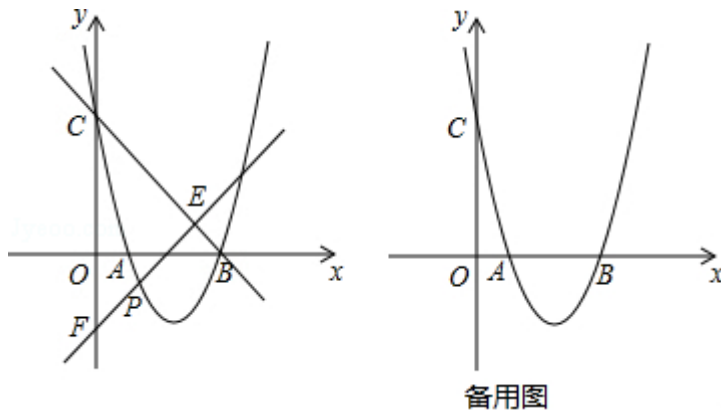
(1) 求抛物线的解析式；

(2) 点 P 在  $x$  轴下方的抛物线上，过点 P 的直线  $y=x+m$  与直线 BC 交于点 E，与  $y$  轴交于点 F，求  $PE+EF$  的最大值；

(3) 点 D 为抛物线对称轴上一点.

①当  $\triangle BCD$  是以 BC 为直角边的直角三角形时，直接写出点 D 的坐标；

②若  $\triangle BCD$  是锐角三角形，直接写出点 D 的纵坐标  $n$  的取值范围.

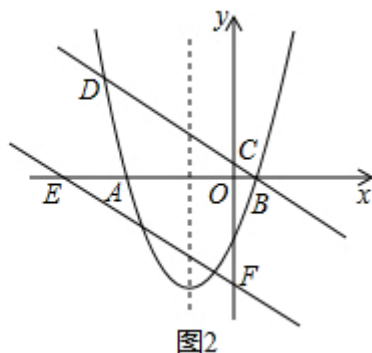
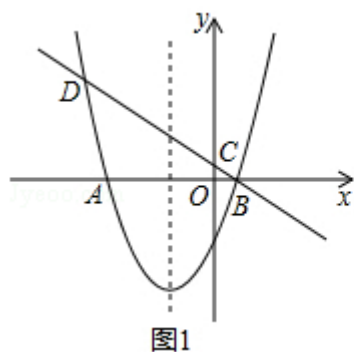


45. 如图 1，抛物线  $y=ax^2+2x+c$  与  $x$  轴交于 A  $(-4, 0)$ ，B  $(1, 0)$  两点，过点 B 的直线  $y=kx+\frac{2}{3}$  分别与  $y$  轴及抛物线交于点 C，D.

(1) 求直线和抛物线的表达式；

(2) 动点 P 从点 O 出发，在  $x$  轴的负半轴上以每秒 1 个单位长度的速度向左匀速运动，设运动时间为  $t$  秒，当  $t$  为何值时， $\triangle PDC$  为直角三角形？请直接写出所有满足条件的  $t$  的值；

(3) 如图 2，将直线 BD 沿  $y$  轴向下平移 4 个单位后，与  $x$  轴， $y$  轴分别交于 E，F 两点，在抛物线的对称轴上是否存在点 M，在直线 EF 上是否存在点 N，使  $DM+MN$  的值最小？若存在，求出其最小值及点 M，N 的坐标；若不存在，请说明理由.

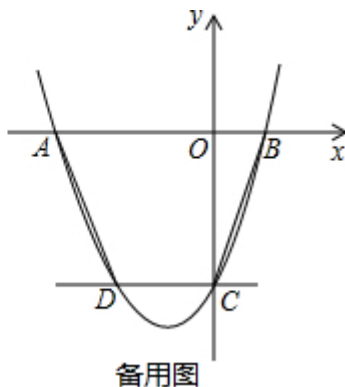
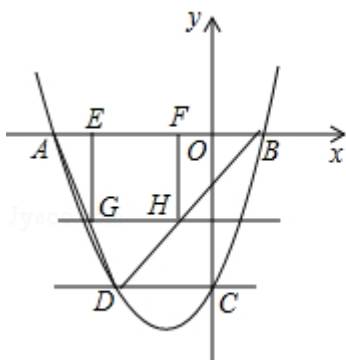


46. 如图，已知抛物线  $y = ax^2 + bx - 3$  与  $x$  轴交于点  $A(-3, 0)$  和点  $B(1, 0)$ ，交  $y$  轴于点  $C$ ，过点  $C$  作  $CD \parallel x$  轴，交抛物线于点  $D$ 。

(1) 求抛物线的解析式；

(2) 若直线  $y = m$  ( $-3 < m < 0$ ) 与线段  $AD$ 、 $BD$  分别交于  $G$ 、 $H$  两点，过  $G$  点作  $EG \perp x$  轴于点  $E$ ，过点  $H$  作  $HF \perp x$  轴于点  $F$ ，求矩形  $GEFH$  的最大面积；

(3) 若直线  $y = kx + 1$  将四边形  $ABCD$  分成左、右两个部分，面积分别为  $S_1$ ， $S_2$ ，且  $S_1 : S_2 = 4 : 5$ ，求  $k$  的值。



备用图

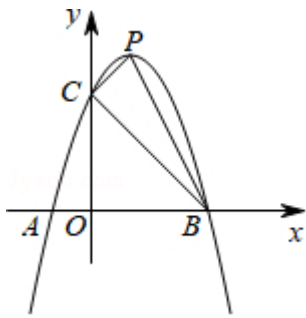
47. 如图，抛物线顶点  $P(1, 4)$ ，与  $y$  轴交于点  $C(0, 3)$ ，与  $x$  轴交于点  $A$ ， $B$ 。

(1) 求抛物线的解析式。

(2)  $Q$  是抛物线上除点  $P$  外一点， $\triangle BCQ$  与  $\triangle BCP$  的面积相等，求点  $Q$  的坐标。

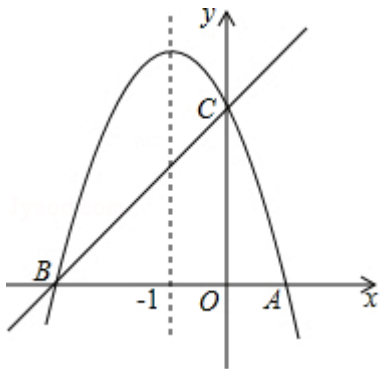
(3) 若  $M$ ， $N$  为抛物线上两个动点，分别过点  $M$ ， $N$  作直线  $BC$  的垂线段，垂足分别为  $D$ ， $E$ 。是否存在点  $M$ ， $N$  使四边形  $MNED$  为正方形？如果存在，求正方形  $MNED$  的边长；如果不存在，请说明理由。





48. 如图，已知抛物线  $y=ax^2+bx+c$  ( $a \neq 0$ ) 的对称轴为直线  $x=-1$ ，且抛物线与  $x$  轴交于 A、B 两点，与  $y$  轴交于 C 点，其中 A (1, 0)，C (0, 3)。

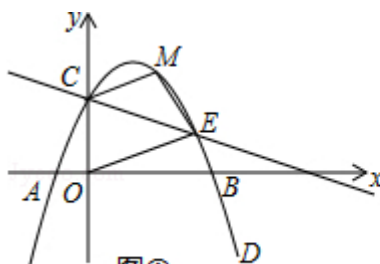
- (1) 若直线  $y=mx+n$  经过 B、C 两点，求直线 BC 和抛物线的解析式；
- (2) 在抛物线的对称轴  $x=-1$  上找一点 M，使点 M 到点 A 的距离与到点 C 的距离之和最小，求出点 M 的坐标；
- (3) 设点 P 为抛物线的对称轴  $x=-1$  上的一个动点，求使  $\triangle BPC$  为直角三角形的点 P 的坐标。



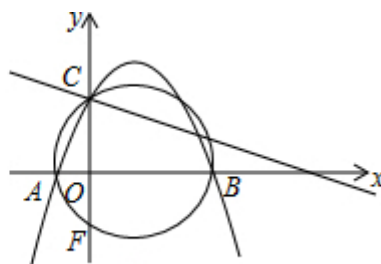
49. 在平面直角坐标系中，二次函数  $y=ax^2+\frac{5}{3}x+c$  的图象经过点 C (0, 2) 和点 D

(4, -2)。点 E 是直线  $y=-\frac{1}{3}x+2$  与二次函数图象在第一象限内的交点。

- (1) 求二次函数的解析式及点 E 的坐标。
- (2) 如图①，若点 M 是二次函数图象上的点，且在直线 CE 的上方，连接 MC，OE，ME。求四边形 COEM 面积的最大值及此时点 M 的坐标。
- (3) 如图②，经过 A、B、C 三点的圆交  $y$  轴于点 F，求点 F 的坐标。



图①



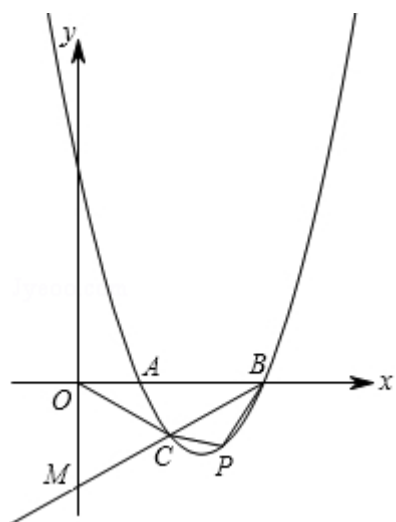
图②

50. 如图，抛物线  $y=a(x-1)(x-3)$  ( $a>0$ ) 与  $x$  轴交于  $A$ 、 $B$  两点，抛物线上另有一点  $C$  在  $x$  轴下方，且使  $\triangle OCA \sim \triangle OBC$ .

(1) 求线段  $OC$  的长度；

(2) 设直线  $BC$  与  $y$  轴交于点  $M$ ，点  $C$  是  $BM$  的中点时，求直线  $BM$  和抛物线的解析式；

(3) 在 (2) 的条件下，直线  $BC$  下方抛物线上是否存在一点  $P$ ，使得四边形  $ABPC$  面积最大？若存在，请求出点  $P$  的坐标；若不存在，请说明理由.



## 一. 解答题（共 50 小题）

1. 如图 1，已知二次函数  $y=ax^2+\frac{3}{2}x+c$  ( $a\neq 0$ ) 的图象与  $y$  轴交于点  $A(0, 4)$ ，与  $x$  轴交于点  $B$ 、 $C$ ，点  $C$  坐标为  $(8, 0)$ ，连接  $AB$ 、 $AC$ 。

(1) 请直接写出二次函数  $y=ax^2+\frac{3}{2}x+c$  的表达式；

(2) 判断  $\triangle ABC$  的形状，并说明理由；

(3) 若点  $N$  在  $x$  轴上运动，当以点  $A$ 、 $N$ 、 $C$  为顶点的三角形是等腰三角形时，请写出此时点  $N$  的坐标；

(4) 如图 2，若点  $N$  在线段  $BC$  上运动（不与点  $B$ 、 $C$  重合），过点  $N$  作  $NM \parallel AC$ ，交  $AB$  于点  $M$ ，当  $\triangle AMN$  面积最大时，求此时点  $N$  的坐标。

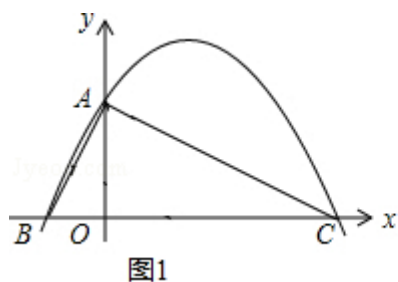


图1

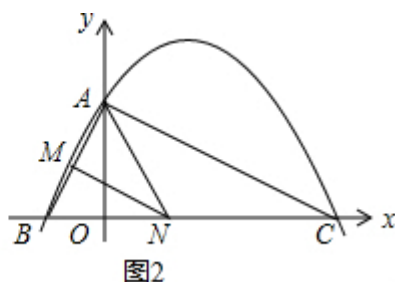


图2

【分析】(1) 根据待定系数法即可求得；

(2) 根据抛物线的解析式求得  $B$  的坐标，然后根据勾股定理分别求得  $AB^2=20$ ， $AC^2=80$ ， $BC=10$ ，然后根据勾股定理的逆定理即可证得  $\triangle ABC$  是直角三角形。

(3) 分别以  $A$ 、 $C$  两点为圆心， $AC$  长为半径画弧，与  $x$  轴交于三个点，由  $AC$  的垂直平分线与  $x$  轴交于一个点，即可求得点  $N$  的坐标；

(4) 设点  $N$  的坐标为  $(n, 0)$ ，则  $BN=n+2$ ，过  $M$  点作  $MD \perp x$  轴于点  $D$ ，根据三角形相似对应边成比例求得  $MD=\frac{2}{5}(n+2)$ ，然后根据  $S_{\triangle AMN}=S_{\triangle ABN}-S_{\triangle BMN}$  得出关于  $n$  的二次函数，根据函数解析式求得即可。

【解答】解：(1)  $\because$  二次函数  $y=ax^2+\frac{3}{2}x+c$  的图象与  $y$  轴交于点  $A(0, 4)$ ，与  $x$  轴交于点  $B$ 、 $C$ ，点  $C$  坐标为  $(8, 0)$ ，

$$\therefore \begin{cases} c=4 \\ 64a+12+c=0 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = -\frac{1}{4} \\ c = 4 \end{cases}$$

$$\therefore \text{抛物线表达式: } y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 4;$$

(2)  $\triangle ABC$  是直角三角形.

$$\text{令 } y=0, \text{ 则 } -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 4 = 0,$$

$$\text{解得 } x_1=8, x_2=-2,$$

$\therefore$  点 B 的坐标为  $(-2, 0)$ ,

由已知可得,

$$\text{在 Rt}\triangle ABO \text{ 中 } AB^2 = BO^2 + AO^2 = 2^2 + 4^2 = 20,$$

$$\text{在 Rt}\triangle AOC \text{ 中 } AC^2 = AO^2 + CO^2 = 4^2 + 8^2 = 80,$$

$$\text{又 } \because BC = OB + OC = 2 + 8 = 10,$$

$$\therefore \text{在 } \triangle ABC \text{ 中 } AB^2 + AC^2 = 20 + 80 = 10^2 = BC^2$$

$\therefore \triangle ABC$  是直角三角形.

$$(3) \because A(0, 4), C(8, 0),$$

$$\therefore AC = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5},$$

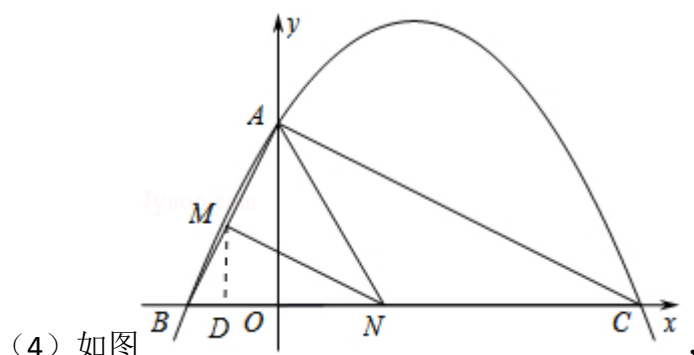
①以 A 为圆心, 以 AC 长为半径作圆, 交 x 轴于 N, 此时 N 的坐标为  $(-8, 0)$ ,

②以 C 为圆心, 以 AC 长为半径作圆, 交 x 轴于 N, 此时 N 的坐标为  $(8 - 4\sqrt{5}, 0)$  或  $(8 + 4\sqrt{5}, 0)$

③作 AC 的垂直平分线, 交 x 轴于 N, 此时 N 的坐标为  $(3, 0)$ ,

综上, 若点 N 在 x 轴上运动, 当以点 A、N、C 为顶点的三角形是等腰三角形时,

点 N 的坐标分别为  $(-8, 0)$ 、 $(8 - 4\sqrt{5}, 0)$ 、 $(3, 0)$ 、 $(8 + 4\sqrt{5}, 0)$ .



$$AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = 2\sqrt{5}, \quad BC = 8 - (-2) = 10, \quad AC = \sqrt{OC^2 + OA^2} = 4\sqrt{5},$$

$$\therefore AB^2 + AC^2 = BC^2,$$

$$\therefore \angle BAC = 90^\circ.$$

$$\therefore AC \perp AB.$$

$$\because AC \parallel MN,$$

$$\therefore MN \perp AB.$$

设点 N 的坐标为 (n, 0), 则 BN = n + 2,

$$\because MN \parallel AC,$$

$$\triangle BMN \sim \triangle BAC$$

$$\therefore \frac{BM}{BA} = \frac{BN}{BC},$$

$$\therefore \frac{MN}{AC} = \frac{BN}{BC},$$

$$BM = \frac{BN \cdot BA}{BC} = \frac{\sqrt{5}(n+2)}{5},$$

$$MN = \frac{BN \cdot AC}{BC} = \frac{2\sqrt{5}(n+2)}{5},$$

$$AM = AB - BM = 2\sqrt{5} - \frac{\sqrt{5}(n+2)}{5} = \frac{8\sqrt{5} - \sqrt{5}n}{5}$$

$$\because S_{\triangle AMN} = \frac{1}{2} AM \cdot MN$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{8\sqrt{5} - \sqrt{5}n}{5} \times \frac{2\sqrt{5}n + 4\sqrt{5}}{5}$$

$$= -\frac{1}{5}(n-3)^2 + 5,$$

当 n = 3 时,  $\triangle AMN$  面积最大是 5,

$$\therefore N \text{ 点坐标为 } (3, 0).$$

$$\therefore \text{当 } \triangle AMN \text{ 面积最大时, } N \text{ 点坐标为 } (3, 0).$$

**【点评】** 本题是二次函数的综合题, 解 (1) 的关键是待定系数法求解析式, 解 (2) 的关键是勾股定理和逆定理, 解 (3) 的关键是等腰三角形的性质, 解 (4) 的关键是三角形相似的判定和性质以及函数的最值等.

2. 对于平面直角坐标系 xOy 中的图形 M, N, 给出如下定义: P 为图形 M 上任意一点, Q 为图形 N 上任意一点, 如果 P, Q 两点间的距离有最小值, 那么称这个最小值为图形 M, N 间的“闭距离”, 记作 d(M, N).

已知点 A(-2, 6), B(-2, -2), C(6, -2).

(1) 求  $d(\text{点 } O, \triangle ABC)$ ;

(2) 记函数  $y=kx$  ( $-1 \leq x \leq 1$ ,  $k \neq 0$ ) 的图象为图形  $G$ . 若  $d(G, \triangle ABC) = 1$ , 直接写出  $k$  的取值范围;

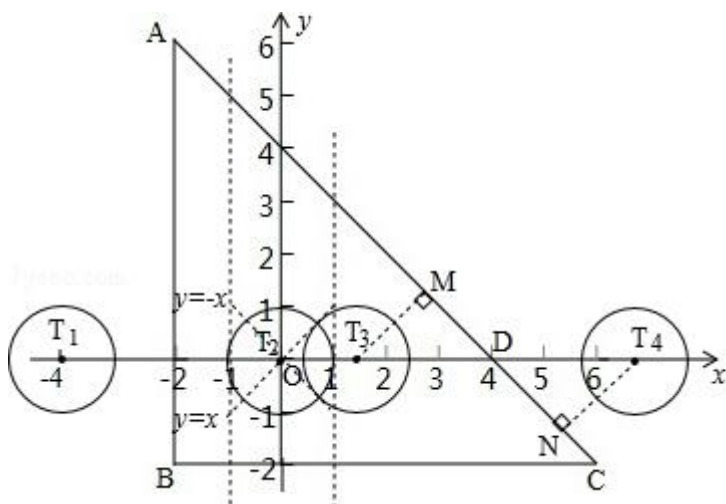
(3)  $\odot T$  的圆心为  $T(t, 0)$ , 半径为 1. 若  $d(\odot T, \triangle ABC) = 1$ , 直接写出  $t$  的取值范围.

**【分析】**(1) 根据点  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三点的坐标作出  $\triangle ABC$ , 利用“闭距离”的定义即可得;

(2) 由题意知  $y=kx$  在  $-1 \leq x \leq 1$  范围内函数图象为过原点的线段, 再分别求得经过  $(1, -1)$  和  $(-1, -1)$  时  $k$  的值即可得;

(3) 分  $\odot T$  在  $\triangle ABC$  的左侧、内部和右侧三种情况, 利用“闭距离”的定义逐一判断即可得.

**【解答】**解: (1) 如图所示, 点  $O$  到  $\triangle ABC$  的距离的最小值为 2,



$\therefore d(\text{点 } O, \triangle ABC) = 2$ ;

(2)  $y=kx$  ( $k \neq 0$ ) 经过原点, 在  $-1 \leq x \leq 1$  范围内, 函数图象为线段,

当  $y=kx$  ( $-1 \leq x \leq 1$ ,  $k \neq 0$ ) 经过  $(1, -1)$  时,  $k = -1$ , 此时  $d(G, \triangle ABC) = 1$ ;

当  $y=kx$  ( $-1 \leq x \leq 1$ ,  $k \neq 0$ ) 经过  $(-1, -1)$  时,  $k = 1$ , 此时  $d(G, \triangle ABC) = 1$ ;

$\therefore -1 \leq k \leq 1$ ,

$\because k \neq 0$ ,

$\therefore -1 \leq k \leq 1$  且  $k \neq 0$ ;

(3)  $\odot T$  与  $\triangle ABC$  的位置关系分三种情况:

①当  $\odot T$  在  $\triangle ABC$  的左侧时, 由  $d(\odot T, \triangle ABC) = 1$  知此时  $t = -4$ ;

②当  $\odot T$  在  $\triangle ABC$  内部时,

当点  $T$  与原点重合时,  $d(\odot T, \triangle ABC) = 1$ , 知此时  $t = 0$ ;

当点  $T$  位于  $T_3$  位置时, 由  $d(\odot T, \triangle ABC) = 1$  知  $T_3M = 2$ ,

$\because AB = BC = 8, \angle ABC = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle C = \angle T_3DM = 45^\circ$ ,

$$\text{则 } T_3D = \frac{T_3M}{\cos 45^\circ} = \frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore t = 4 - 2\sqrt{2},$$

故此时  $0 \leq t \leq 4 - 2\sqrt{2}$ ;

③当  $\odot T$  在  $\triangle ABC$  右边时, 由  $d(\odot T, \triangle ABC) = 1$  知  $T_4N = 2$ ,

$\because \angle T_4DC = \angle C = 45^\circ$ ,

$$\therefore T_4D = \frac{T_4N}{\cos 45^\circ} = \frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore t = 4 + 2\sqrt{2};$$

综上,  $t = -4$  或  $0 \leq t \leq 4 - 2\sqrt{2}$  或  $t = 4 + 2\sqrt{2}$ .

**【点评】** 本题主要考查圆的综合问题, 解题的关键是理解并掌握“闭距离”的定义与直线与圆的位置关系和分类讨论思想的运用.

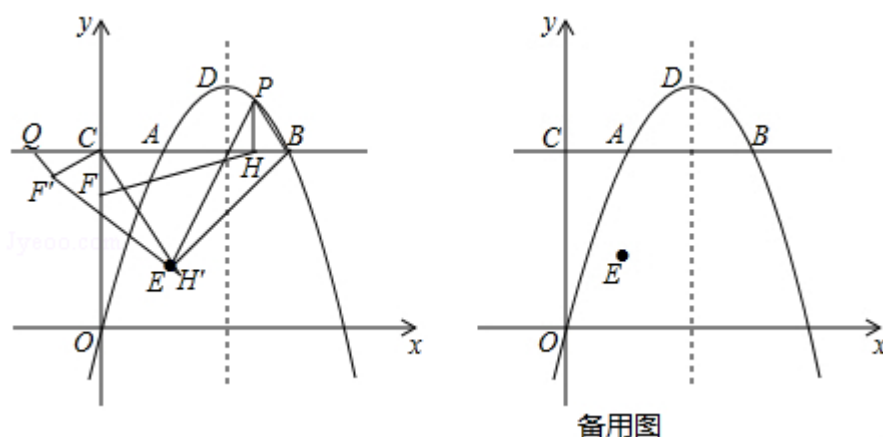
3. 如图, 在平面直角坐标系中, 点  $A$  在抛物线  $y = -x^2 + 4x$  上, 且横坐标为 1, 点  $B$  与点  $A$  关于抛物线的对称轴对称, 直线  $AB$  与  $y$  轴交于点  $C$ , 点  $D$  为抛物线的顶点, 点  $E$  的坐标为  $(1, 1)$ .

(1) 求线段  $AB$  的长;

(2) 点  $P$  为线段  $AB$  上方抛物线上的任意一点, 过点  $P$  作  $AB$  的垂线交  $AB$  于点  $H$ , 点  $F$  为  $y$  轴上一点, 当  $\triangle PBE$  的面积最大时, 求  $PH + HF + \frac{1}{2}FO$  的最小值;

(3) 在 (2) 中,  $PH + HF + \frac{1}{2}FO$  取得最小值时, 将  $\triangle CFH$  绕点  $C$  顺时针旋转  $60^\circ$  后得到  $\triangle CF'H'$ , 过点  $F'$  作  $CF'$  的垂线与直线  $AB$  交于点  $Q$ , 点  $R$  为抛物线对称轴上的一点, 在平面直角坐标系中是否存在点  $S$ , 使以点  $D, Q, R, S$  为顶点的四边

形为菱形，若存在，请直接写出点 S 的坐标，若不存在，请说明理由.



**【分析】** (1) 求出 A、B 两点坐标，即可解决问题；

(2) 如图 1 中，设  $P(m, -m^2+4m)$ ，作  $PN \parallel y$  轴交  $BE$  于  $N$ 。构建二次函数利用二次函数的性质求出满足条件的点  $P$  坐标，作直线  $OG$  交  $AB$  于  $G$ ，使得  $\angle COG=30^\circ$ ，作  $HK \perp OG$  于  $K$  交  $OC$  于  $F$ ，因为  $FK=\frac{1}{2}OF$ ，推出  $PH+HF+\frac{1}{2}FO=PH+FH+FK=PH+HK$ ，此时  $PH+HF+OF$  的值最小，解直角三角形即可解决问题；

(3) 分两种情形分别求解即可；

**【解答】** 解：(1) 由题意  $A(1, 3)$ ， $B(3, 3)$ ，

$$\therefore AB=2.$$

(2) 如图 1 中，设  $P(m, -m^2+4m)$ ，作  $PN \parallel y$  轴交  $BE$  于  $N$ 。

$\because$  直线  $BE$  的解析式为  $y=x$ ，

$$\therefore N(m, m),$$

$$\therefore S_{\triangle PEB} = \frac{1}{2} \times 2 \times (-m^2+3m) = -m^2+3m,$$

$$\therefore \text{当 } m=\frac{3}{2} \text{ 时, } \triangle PEB \text{ 的面积最大, 此时 } P\left(\frac{3}{2}, \frac{15}{4}\right), H\left(\frac{3}{2}, 3\right),$$

$$\therefore PH = \frac{15}{4} - 3 = \frac{3}{4},$$

作直线  $OG$  交  $AB$  于  $G$ ，使得  $\angle COG=30^\circ$ ，作  $HK \perp OG$  于  $K$  交  $OC$  于  $F$ ，

$$\therefore FK = \frac{1}{2}OF,$$

$$\therefore PH+HF+\frac{1}{2}FO=PH+FH+FK=PH+HK, \text{ 此时 } PH+HF+OF \text{ 的值最小,}$$

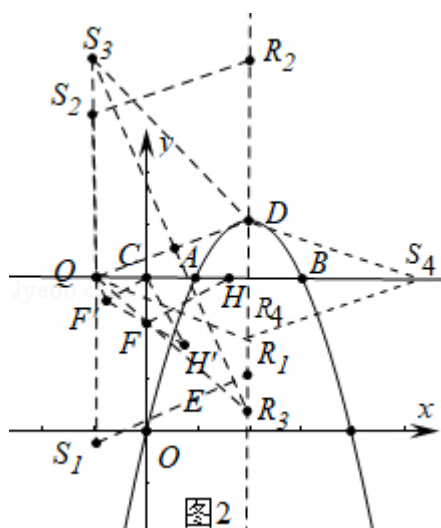


$$\therefore \frac{1}{2} \cdot HG \cdot OC = \frac{1}{2} \cdot OG \cdot HK,$$

$$\therefore HK = \frac{3 \times (\sqrt{3} + \frac{3}{2})}{2\sqrt{3}} = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{4},$$

$$\therefore PH + HF + OF \text{ 的最小值为 } \frac{9}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

(3) 如图 2 中, 由题意  $CH = \frac{3}{2}$ ,  $CF = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $QF = \frac{1}{2}$ ,  $CQ = 1$ ,



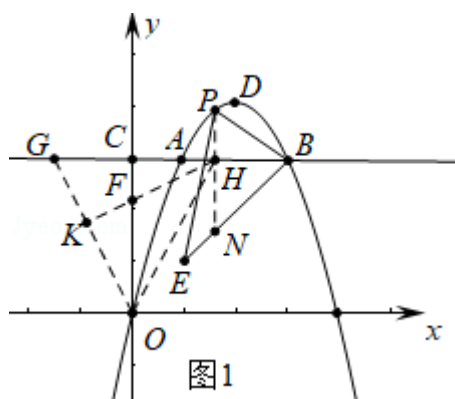
$$\therefore Q(-1, 3), D(2, 4), DQ = \sqrt{10},$$

①当 DQ 为菱形的边时,  $S_1(-1, 3 - \sqrt{10})$ ,  $S_2(-1, 3 + \sqrt{10})$ ,

②当 DQ 为对角线时, 可得  $S_3(-1, 8)$ ,

③当 DR 为对角线时, 可得  $S_4(5, 3)$

综上所述, 满足条件的点 S 坐标为  $(-1, 3 - \sqrt{10})$  或  $(-1, 3 + \sqrt{10})$  或  $(-1, 8)$  或  $(5, 3)$ .



**【点评】** 本题考查二次函数综合题、最短问题、菱形的判定和性质、解直角三角

形、勾股定理等知识，解题的关键是学会构建二次函数解决最值问题，学会添加常用辅助线，根据垂线段最短解决最短问题，学会用分类讨论的思想思考问题，属于中考压轴题.

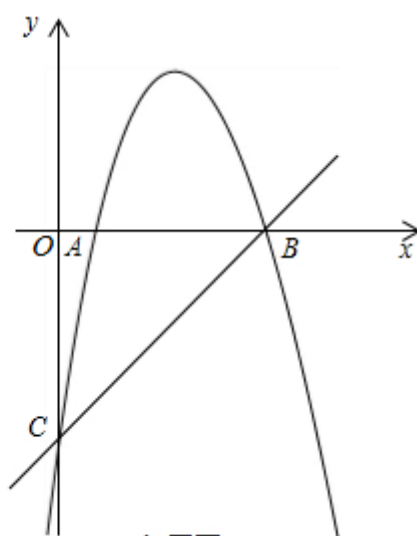
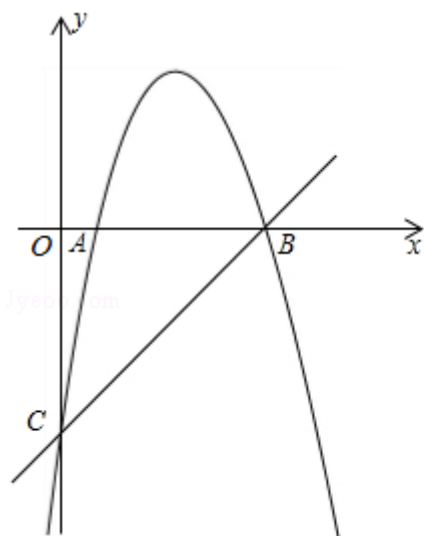
4. 如图，抛物线  $y=ax^2+6x+c$  交  $x$  轴于  $A, B$  两点，交  $y$  轴于点  $C$ . 直线  $y=x-5$  经过点  $B, C$ .

(1) 求抛物线的解析式;

(2) 过点  $A$  的直线交直线  $BC$  于点  $M$ .

①当  $AM \perp BC$  时，过抛物线上一动点  $P$  (不与点  $B, C$  重合)，作直线  $AM$  的平行线交直线  $BC$  于点  $Q$ ，若以点  $A, M, P, Q$  为顶点的四边形是平行四边形，求点  $P$  的横坐标;

②连接  $AC$ ，当直线  $AM$  与直线  $BC$  的夹角等于  $\angle ACB$  的 2 倍时，请直接写出点  $M$  的坐标.



备用图

**【分析】**(1) 利用一次函数解析式确定  $C(0, -5)$ ,  $B(5, 0)$ ，然后利用待定系数法求抛物线解析式;

(2) ①先解方程  $-x^2+6x-5=0$  得  $A(1, 0)$ ，再判断  $\triangle OCB$  为等腰直角三角形得到  $\angle OBC = \angle OCB = 45^\circ$ ，则  $\triangle AMB$  为等腰直角三角形，所以  $AM = 2\sqrt{2}$ ，接着根据平行四边形的性质得到  $PQ = AM = 2\sqrt{2}$ ， $PQ \perp BC$ ，作  $PD \perp x$  轴交直线  $BC$  于  $D$ ，如图 1，利用  $\angle PDQ = 45^\circ$  得到  $PD = \sqrt{2}PQ = 4$ ，设  $P(m, -m^2+6m-5)$ ，则  $D(m, m-5)$ ，讨论：当  $P$  点在直线  $BC$  上方时， $PD = -m^2+6m-5 - (m-5) = 4$ ；当  $P$  点在直线

BC 下方时,  $PD=m-5-(-m^2+6m-5)$ , 然后分别解方程即可得到 P 点的横坐标;

②作  $AN \perp BC$  于 N,  $NH \perp x$  轴于 H, 作 AC 的垂直平分线交 BC 于  $M_1$ , 交 AC 于 E, 如图 2, 利用等腰三角形的性质和三角形外角性质得到  $\angle AM_1B = 2\angle ACB$ , 再确定 N (3, -2),

AC 的解析式为  $y=5x-5$ , E 点坐标为  $(\frac{1}{2}, -\frac{5}{2})$ , 利用两直线垂直的问题可设直线  $EM_1$  的解析式为  $y=-\frac{1}{5}x+b$ , 把 E  $(\frac{1}{2}, -\frac{5}{2})$  代入求出 b 得到直线  $EM_1$  的解析式为  $y=-\frac{1}{5}x-\frac{12}{5}$ , 则解方程组  $\begin{cases} y=x-5 \\ y=-\frac{1}{5}x-\frac{12}{5} \end{cases}$  得  $M_1$  点的坐标; 作直线 BC 上作点

$M_1$  关于 N 点的对称点  $M_2$ , 如图 2, 利用对称性得到  $\angle AM_2C = \angle AM_1B = 2\angle ACB$ ,

设  $M_2(x, x-5)$ , 根据中点坐标公式得到  $3=\frac{\frac{13}{6}+x}{2}$ , 然后求出 x 即可得到  $M_2$  的坐标, 从而得到满足条件的点 M 的坐标.

【解答】解: (1) 当  $x=0$  时,  $y=x-5=-5$ , 则 C (0, -5),

当  $y=0$  时,  $x-5=0$ , 解得  $x=5$ , 则 B (5, 0),

把 B (5, 0), C (0, -5) 代入  $y=ax^2+6x+c$  得  $\begin{cases} 25a+30+c=0 \\ c=-5 \end{cases}$ , 解得  $\begin{cases} a=-1 \\ b=-5 \end{cases}$ ,

$\therefore$  抛物线解析式为  $y=-x^2+6x-5$ ;

(2) ①解方程  $-x^2+6x-5=0$  得  $x_1=1$ ,  $x_2=5$ , 则 A (1, 0),

$\because B(5, 0), C(0, -5)$ ,

$\therefore \triangle OCB$  为等腰直角三角形,

$\therefore \angle OBC = \angle OCB = 45^\circ$ ,

$\because AM \perp BC$ ,

$\therefore \triangle AMB$  为等腰直角三角形,

$\therefore AM = \frac{\sqrt{2}}{2} AB = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 4 = 2\sqrt{2}$ ,

$\because$  以点 A, M, P, Q 为顶点的四边形是平行四边形,  $AM \parallel PQ$ ,

$\therefore PQ = AM = 2\sqrt{2}$ ,  $PQ \perp BC$ ,

作  $PD \perp x$  轴交直线 BC 于 D, 如图 1, 则  $\angle PDQ = 45^\circ$ ,

$\therefore PD = \sqrt{2}PQ = \sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 4$ ,

设  $P(m, -m^2+6m-5)$ , 则  $D(m, m-5)$ ,

当  $P$  点在直线  $BC$  上方时,

$$PD = -m^2+6m-5 - (m-5) = -m^2+5m=4, \text{ 解得 } m_1=1, m_2=4,$$

当  $P$  点在直线  $BC$  下方时,

$$PD = m-5 - (-m^2+6m-5) = m^2-5m=4, \text{ 解得 } m_1=\frac{5+\sqrt{41}}{2}, m_2=\frac{5-\sqrt{41}}{2},$$

综上所述,  $P$  点的横坐标为  $4$  或  $\frac{5+\sqrt{41}}{2}$  或  $\frac{5-\sqrt{41}}{2}$ ;

②作  $AN \perp BC$  于  $N$ ,  $NH \perp x$  轴于  $H$ , 作  $AC$  的垂直平分线交  $BC$  于  $M_1$ , 交  $AC$  于  $E$ , 如图 2,

$$\because M_1A=M_1C,$$

$$\therefore \angle ACM_1 = \angle CAM_1,$$

$$\therefore \angle AM_1B = 2\angle ACB,$$

$\because \triangle ANB$  为等腰直角三角形,

$$\therefore AH=BH=NH=2,$$

$$\therefore N(3, -2),$$

易得  $AC$  的解析式为  $y=5x-5$ ,  $E$  点坐标为  $(\frac{1}{2}, -\frac{5}{2})$ ,

设直线  $EM_1$  的解析式为  $y=-\frac{1}{5}x+b$ ,

把  $E(\frac{1}{2}, -\frac{5}{2})$  代入得  $-\frac{1}{10}+b=-\frac{5}{2}$ , 解得  $b=-\frac{12}{5}$ ,

$\therefore$  直线  $EM_1$  的解析式为  $y=-\frac{1}{5}x-\frac{12}{5}$ ,

$$\text{解方程组 } \begin{cases} y=x-5 \\ y=-\frac{1}{5}x-\frac{12}{5} \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x=\frac{13}{6} \\ y=-\frac{17}{6} \end{cases}, \text{ 则 } M_1(\frac{13}{6}, -\frac{17}{6});$$

作直线  $BC$  上作点  $M_1$  关于  $N$  点的对称点  $M_2$ , 如图 2, 则  $\angle AM_2C = \angle AM_1B = 2\angle ACB$ ,

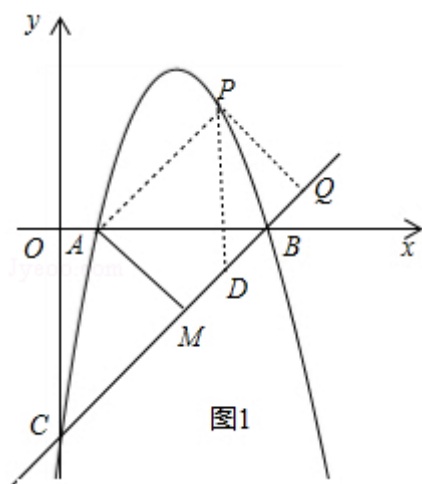
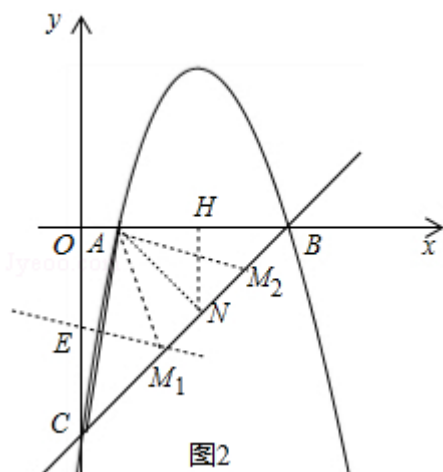
设  $M_2(x, x-5)$ ,

$$\because 3 = \frac{\frac{13}{6} + x}{2},$$

$$\therefore x = \frac{23}{6},$$

$$\therefore M_2 \left( \frac{23}{6}, -\frac{7}{6} \right),$$

综上所述，点 M 的坐标为  $(\frac{13}{6}, -\frac{17}{6})$  或  $(\frac{23}{6}, -\frac{7}{6})$ .



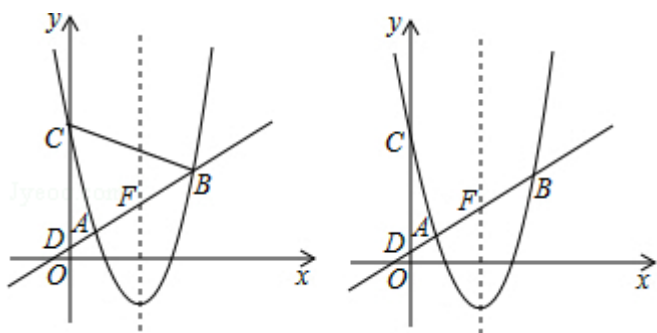
**【点评】**本题考查了二次函数的综合题：熟练掌握二次函数图象上点的坐标特征、二次函数的性质、等腰直角的判定与性质和平行四边形的性质；会利用待定系数法求函数解析式；理解坐标与图形性质；会运用分类讨论的思想解决数学问题.

5. 如图，在平面直角坐标系  $xOy$  中，以直线  $x=\frac{5}{2}$  为对称轴的抛物线  $y=ax^2+bx+c$  与直线  $l: y=kx+m$  ( $k>0$ ) 交于  $A(1, 1)$ ,  $B$  两点，与  $y$  轴交于  $C(0, 5)$ ，直线  $l$  与  $y$  轴交于点  $D$ 。

(1) 求抛物线的函数表达式;

(2) 设直线  $l$  与抛物线的对称轴的交点为  $F$ ,  $G$  是抛物线上位于对称轴右侧的一点, 若  $\frac{AF}{FB} = \frac{3}{4}$ , 且  $\triangle BCG$  与  $\triangle BCD$  面积相等, 求点  $G$  的坐标;

(3) 若在  $x$  轴上有且仅有一点  $P$ , 使  $\angle APB=90^\circ$ , 求  $k$  的值.



【分析】(1) 根据已知列出方程组求解即可；

(2) 作  $AM \perp x$  轴,  $BN \perp x$  轴, 垂足分别为  $M$ ,  $N$ , 求出直线  $l$  的解析式, 再分两种情况分别分析出  $G$  点坐标即可；

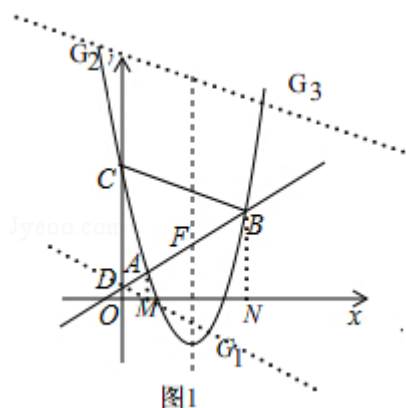
(3) 根据题意分析得出以  $AB$  为直径的圆与  $x$  轴只有一个交点, 且  $P$  为切点,  $P$  为  $MN$  的中点, 运用三角形相似建立等量关系列出方程求解即可.

【解答】解: (1) 由题意可得 
$$\begin{cases} \frac{b}{2a} = -\frac{5}{2} \\ c = 5 \\ a + b + c = 1 \end{cases}$$

解得  $a=1$ ,  $b=-5$ ,  $c=5$ ;

$\therefore$  二次函数的解析式为:  $y=x^2-5x+5$ ,

(2) 作  $AM \perp x$  轴,  $BN \perp x$  轴, 垂足分别为  $M$ ,  $N$ ,



则  $\frac{AF}{FB} = \frac{MQ}{QN} = \frac{3}{4}$ ,

$\therefore MQ = \frac{3}{2}$ ,

$\therefore NQ=2$ ,  $B\left(\frac{9}{2}, \frac{11}{4}\right)$ ;

$\therefore \begin{cases} k+m=1 \\ \frac{9}{2}k+m=\frac{11}{4} \end{cases}$ ,

$$\text{解得} \begin{cases} k=\frac{1}{2} \\ m=\frac{1}{2} \end{cases},$$

$$\therefore y_1 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, \quad D(0, \frac{1}{2}),$$

$$\text{同理可求, } y_{BC} = -\frac{1}{2}x + 5,$$

$$\therefore S_{\triangle BCD} = S_{\triangle BCG},$$

$$\therefore \text{① } DG \parallel BC \text{ (G 在 BC 下方), } y_{DG} = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2},$$

$$\therefore -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = x^2 - 5x + 5,$$

$$\text{解得, } x_1 = \frac{3}{2}, \quad x_2 = 3,$$

$$\therefore x > \frac{5}{2},$$

$$\therefore x = 3,$$

$$\therefore G(3, -1).$$

② G 在 BC 上方时, 直线  $G_2G_3$  与  $DG_1$  关于 BC 对称,

$$\therefore y_{G_2G_3} = -\frac{1}{2}x + \frac{19}{2},$$

$$\therefore -\frac{1}{2}x + \frac{19}{2} = x^2 - 5x + 5,$$

$$\text{解得 } x_1 = \frac{9+3\sqrt{17}}{4}, \quad x_2 = \frac{9-3\sqrt{17}}{4},$$

$$\therefore x > \frac{5}{2},$$

$$\therefore x = \frac{9+3\sqrt{17}}{4},$$

$$\therefore G\left(\frac{9+3\sqrt{17}}{4}, \frac{67-3\sqrt{17}}{8}\right),$$

综上所述点 G 的坐标为  $G(3, -1)$ ,  $G\left(\frac{9+3\sqrt{17}}{4}, \frac{67-3\sqrt{17}}{8}\right)$ .

(3) 由题意可知:  $k+m=1$ ,

$$\therefore m = 1 - k,$$

$$\therefore y_l = kx + 1 - k,$$

$$\therefore kx + 1 - k = x^2 - 5x + 5,$$

$$\text{解得, } x_1 = 1, \quad x_2 = k+4,$$

$$\therefore B(k+4, k^2+3k+1),$$

设 AB 中点为 O',

$\because$  P 点有且只有一个,

$\therefore$  以 AB 为直径的圆与 x 轴只有一个交点, 且 P 为切点,

$\therefore O'P \perp x$  轴,

$\therefore$  P 为 MN 的中点,

$$\therefore P\left(\frac{k+5}{2}, 0\right),$$

$\because \triangle AMP \sim \triangle PNB,$

$$\therefore \frac{AM}{PM} = \frac{PN}{BN},$$

$$\therefore AM \cdot BN = PN \cdot PM,$$

$$\therefore 1 \times (k^2+3k+1) = \left(k+4 - \frac{k+5}{2}\right) \left(\frac{k+5}{2} - 1\right),$$

$\because k > 0,$

$$\therefore k = \frac{-6+4\sqrt{6}}{6} = -1 + \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

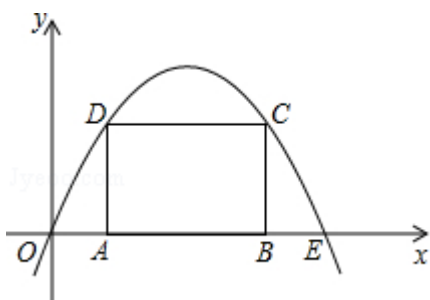
**【点评】**此题主要考查二次函数的综合问题, 会灵活根据题意求抛物线解析式, 会分析题中的基本关系列方程解决问题, 会分类讨论各种情况是解题的关键.

6. 如图, 抛物线  $y=ax^2+bx$  ( $a<0$ ) 过点 E (10, 0), 矩形 ABCD 的边 AB 在线段 OE 上 (点 A 在点 B 的左边), 点 C, D 在抛物线上. 设 A (t, 0), 当 t=2 时, AD=4.

(1) 求抛物线的函数表达式.

(2) 当 t 为何值时, 矩形 ABCD 的周长有最大值? 最大值是多少?

(3) 保持 t=2 时的矩形 ABCD 不动, 向右平移抛物线. 当平移后的抛物线与矩形的边有两个交点 G, H, 且直线 GH 平分矩形的面积时, 求抛物线平移的距离.



**【分析】**(1) 由点 E 的坐标设抛物线的交点式, 再把点 D 的坐标 (2, 4) 代入



计算可得；

(2)由抛物线的对称性得  $BE=OA=t$ ，据此知  $AB=10-2t$ ，再由  $x=t$  时  $AD=-\frac{1}{4}t^2+\frac{5}{2}t$ ，根据矩形的周长公式列出函数解析式，配方成顶点式即可得；

(3)由  $t=2$  得出点 A、B、C、D 及对角线交点 P 的坐标，由直线 GH 平分矩形的面积知直线 GH 必过点 P，根据  $AB\parallel CD$  知线段 OD 平移后得到的线段是 GH，由线段 OD 的中点 Q 平移后的对应点是 P 知 PQ 是  $\triangle OBD$  中位线，据此可得．

**【解答】**解：(1)设抛物线解析式为  $y=ax(x-10)$ ，

$\because$  当  $t=2$  时， $AD=4$ ，

$\therefore$  点 D 的坐标为  $(2, 4)$ ，

$\therefore$  将点 D 坐标代入解析式得  $-16a=4$ ，

解得： $a=-\frac{1}{4}$ ，

抛物线的函数表达式为  $y=-\frac{1}{4}x^2+\frac{5}{2}x$ ；

(2)由抛物线的对称性得  $BE=OA=t$ ，

$\therefore AB=10-2t$ ，

当  $x=t$  时， $AD=-\frac{1}{4}t^2+\frac{5}{2}t$ ，

$\therefore$  矩形 ABCD 的周长  $=2(AB+AD)$

$=2[(10-2t)+(-\frac{1}{4}t^2+\frac{5}{2}t)]$

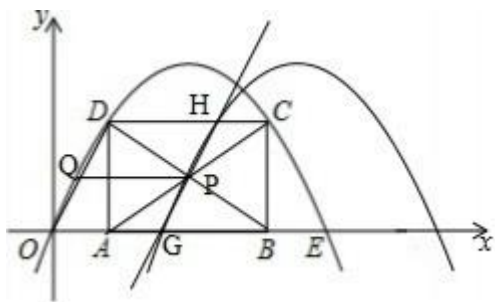
$=-\frac{1}{2}t^2+t+20$

$=-\frac{1}{2}(t-1)^2+\frac{41}{2}$ ，

$\because -\frac{1}{2}<0$ ，

$\therefore$  当  $t=1$  时，矩形 ABCD 的周长有最大值，最大值为  $\frac{41}{2}$ ；

(3)如图，



当  $t=2$  时，点 A、B、C、D 的坐标分别为  $(2, 0)$ 、 $(8, 0)$ 、 $(8, 4)$ 、 $(2, 4)$ ，

$\therefore$  矩形 ABCD 对角线的交点 P 的坐标为  $(5, 2)$ ，

当平移后的抛物线过点 A 时，点 H 的坐标为  $(4, 4)$ ，此时 GH 不能将矩形面积平分；

当平移后的抛物线过点 C 时，点 G 的坐标为  $(6, 0)$ ，此时 GH 也不能将矩形面积平分；

$\therefore$  当 G、H 中有一点落在线段 AD 或 BC 上时，直线 GH 不可能将矩形的面积平分，  
当点 G、H 分别落在线段 AB、DC 上时，直线 GH 过点 P，必平分矩形 ABCD 的面积，

$\because AB \parallel CD$ ，

$\therefore$  线段 OD 平移后得到的线段 GH，

$\therefore$  线段 OD 的中点 Q 平移后的对应点是 P，

在  $\triangle OBD$  中，PQ 是中位线，

$$\therefore PQ = \frac{1}{2}OB = 4,$$

所以抛物线向右平移的距离是 4 个单位。

**【点评】** 本题主要考查二次函数的综合问题，解题的关键是掌握待定系数法求函数解析式、二次函数的性质及平移变换的性质等知识点。

7. 抛物线  $L: y = -x^2 + bx + c$  经过点 A  $(0, 1)$ ，与它的对称轴直线  $x=1$  交于点 B.

(1) 直接写出抛物线 L 的解析式；

(2) 如图 1，过定点的直线  $y=kx - k + 4$  ( $k < 0$ ) 与抛物线 L 交于点 M、N. 若  $\triangle BMN$  的面积等于 1，求 k 的值；

(3) 如图 2，将抛物线 L 向上平移  $m$  ( $m > 0$ ) 个单位长度得到抛物线  $L_1$ ，抛物线  $L_1$  与 y 轴交于点 C，过点 C 作 y 轴的垂线交抛物线  $L_1$  于另一点 D. F 为抛物线

$L_1$  的对称轴与  $x$  轴的交点， $P$  为线段  $OC$  上一点．若  $\triangle PCD$  与  $\triangle POF$  相似，并且符合条件的点  $P$  恰有 2 个，求  $m$  的值及相应点  $P$  的坐标．

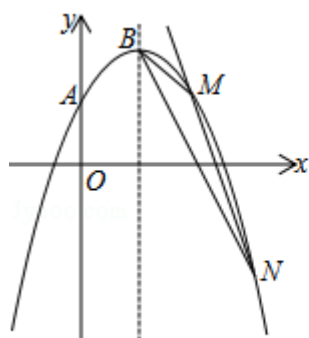


图 1

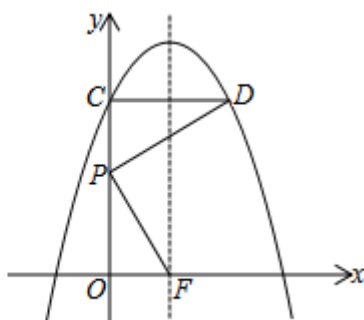


图 2

【分析】(1) 根据对称轴为直线  $x=1$  且抛物线过点  $A(0, 1)$  求解可得；

(2) 根据直线  $y=kx-k+4=k(x-1)+4$  知直线所过定点  $G$  坐标为  $(1, 4)$ ，从而得出  $BG=2$ ，由  $S_{\triangle BMN}=S_{\triangle BNG}-S_{\triangle BMG}=\frac{1}{2}BG \cdot x_N - \frac{1}{2}BG \cdot x_M=1$  得出  $x_N - x_M=1$ ，联立直线和抛物线解析式求得  $x=\frac{2-k \pm \sqrt{k^2-8}}{2}$ ，根据  $x_N - x_M=1$  列出关于  $k$  的方程，解之可得；

(3) 设抛物线  $L_1$  的解析式为  $y=-x^2+2x+1+m$ ，知  $C(0, 1+m)$ 、 $D(2, 1+m)$ 、 $F(1, 0)$ ，再设  $P(0, t)$ ，分  $\triangle PCD \sim \triangle POF$  和  $\triangle PCD \sim \triangle POF$  两种情况，由对应边成比例得出关于  $t$  与  $m$  的方程，利用符合条件的点  $P$  恰有 2 个，结合方程的解的情况求解可得．

【解答】解：(1) 由题意知  $\begin{cases} \frac{b}{2 \times (-1)} = 1, \\ c = 1 \end{cases}$

解得： $b=2$ 、 $c=1$ ，

$\therefore$  抛物线  $L$  的解析式为  $y=-x^2+2x+1$ ；

(2) 如图 1，

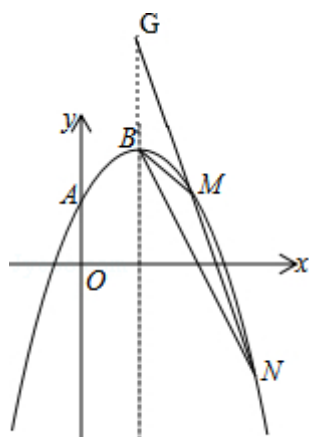


图 1

$$\because y = kx - k + 4 = k(x - 1) + 4,$$

$\therefore$  当  $x=1$  时,  $y=4$ , 即该直线所过定点  $G$  坐标为  $(1, 4)$ ,

$$\because y = -x^2 + 2x + 1 = -(x - 1)^2 + 2,$$

$\therefore$  点  $B(1, 2)$ ,

则  $BG=2$ ,

$$\because S_{\triangle BMN} = 1, \text{ 即 } S_{\triangle BNG} - S_{\triangle BMG} = \frac{1}{2}BG \cdot x_N - \frac{1}{2}BG \cdot x_M = 1,$$

$$\therefore x_N - x_M = 1,$$

$$\text{由 } \begin{cases} y = kx - k + 4 \\ y = -x^2 + 2x + 1 \end{cases} \text{ 得 } x^2 + (k - 2)x - k + 3 = 0,$$

$$\text{解得: } x = \frac{2-k \pm \sqrt{(k-2)^2 - 4(3-k)}}{2} = \frac{2-k \pm \sqrt{k^2 - 8}}{2},$$

$$\text{则 } x_N = \frac{2-k + \sqrt{k^2 - 8}}{2}, \quad x_M = \frac{2-k - \sqrt{k^2 - 8}}{2},$$

$$\text{由 } x_N - x_M = 1 \text{ 得 } \sqrt{k^2 - 8} = 1,$$

$$\therefore k = \pm 3,$$

$$\because k < 0,$$

$$\therefore k = -3;$$

(3) 如图 2,

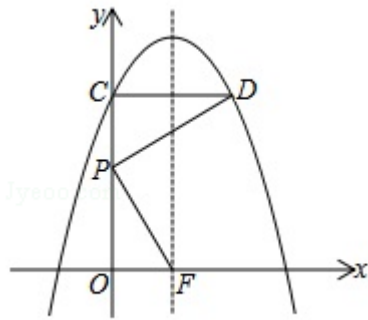


图 2

设抛物线  $L_1$  的解析式为  $y = -x^2 + 2x + 1 + m$ ,

$\therefore C(0, 1+m)$ 、 $D(2, 1+m)$ 、 $F(1, 0)$ ,

设  $P(0, t)$ ,

①当  $\triangle PCD \sim \triangle FOP$  时,  $\frac{PC}{CD} = \frac{FO}{OP}$ ,

$$\therefore \frac{1+m-t}{2} = \frac{1}{t},$$

$$\therefore t^2 - (1+m)t + 2 = 0;$$

②当  $\triangle PCD \sim \triangle POF$  时,  $\frac{PC}{CD} = \frac{PO}{OF}$ ,

$$\therefore \frac{1+m-t}{2} = \frac{t}{1},$$

$$\therefore t = \frac{1}{3}(m+1);$$

(I) 当方程①有两个相等实数根时,

$$\Delta = (1+m)^2 - 8 = 0,$$

解得:  $m = 2\sqrt{2} - 1$  (负值舍去),

此时方程①有两个相等实数根  $t_1 = t_2 = \sqrt{2}$ ,

方程②有一个实数根  $t = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ,

$$\therefore m = 2\sqrt{2} - 1,$$

此时点  $P$  的坐标为  $(0, \sqrt{2})$  和  $(0, \frac{2\sqrt{2}}{3})$ ;

(II) 当方程①有两个不相等的实数根时,

把②代入①, 得:  $\frac{1}{9}(m+1)^2 - \frac{1}{3}(m+1) + 2 = 0$ ,

解得:  $m = 2$  (负值舍去),

此时，方程①有两个不相等的实数根  $t_1=1$ 、 $t_2=2$ ，

方程②有一个实数根  $t=1$ ，

$\therefore m=2$ ，此时点 P 的坐标为  $(0, 1)$  和  $(0, 2)$ ；

综上，当  $m=2\sqrt{2}-1$  时，点 P 的坐标为  $(0, \sqrt{2})$  和  $(0, \frac{2\sqrt{2}}{3})$ ；

当  $m=2$  时，点 P 的坐标为  $(0, 1)$  和  $(0, 2)$ 。

**【点评】** 本题主要考查二次函数的应用，解题的关键是掌握待定系数法求函数解析式、利用割补法求三角形的面积建立关于 k 的方程及相似三角形的判定与性质等知识点。

8. 在平面直角坐标系中，点 O  $(0, 0)$ ，点 A  $(1, 0)$ 。已知抛物线  $y=x^2+mx-2m$  ( $m$  是常数)，顶点为 P。

(I) 当抛物线经过点 A 时，求顶点 P 的坐标；

(II) 若点 P 在 x 轴下方，当  $\angle AOP=45^\circ$  时，求抛物线的解析式；

(III) 无论  $m$  取何值，该抛物线都经过定点 H。当  $\angle AHP=45^\circ$  时，求抛物线的解析式。

**【分析】** (I) 将点 A 坐标代入解析式求得  $m$  的值即可得；

(II) 先求出顶点 P 的坐标  $(-\frac{m}{2}, -\frac{m^2+8m}{4})$ ，根据  $\angle AOP=45^\circ$  知点 P 在第四象限且  $PQ=OQ$ ，列出关于  $m$  的方程，解之可得；

(III) 由  $y=x^2+mx-2m=x^2+m(x-2)$  知 H  $(2, 4)$ ，过点 A 作  $AD \perp AH$ ，交射线 HP 于点 D，分别过点 D、H 作 x 轴的垂线，垂足分别为 E、G，证  $\triangle ADE \cong \triangle HAG$  得  $DE=AG=1$ 、 $AE=HG=4$ ，据此知点 D 的坐标为  $(-3, 1)$  或  $(5, -1)$ ，再求出直线 DH 的解析式，将点 P 的坐标代入求得  $m$  的值即可得出答案。

**【解答】** 解：(I)  $\because$  抛物线  $y=x^2+mx-2m$  经过点 A  $(1, 0)$ ，

$\therefore 0=1+m-2m$ ，

解得： $m=1$ ，

$\therefore$  抛物线解析式为  $y=x^2+x-2$ ，

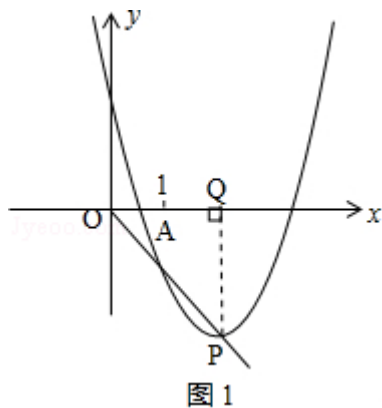
$$\because y = x^2 + x - 2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4},$$

$$\therefore \text{顶点 } P \text{ 的坐标为 } \left(-\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right);$$

$$(\text{II}) \text{ 抛物线 } y = x^2 + mx - 2m \text{ 的顶点 } P \text{ 的坐标为 } \left(-\frac{m}{2}, -\frac{m^2 + 8m}{4}\right),$$

由点 A (1, 0) 在 x 轴的正半轴上, 点 P 在 x 轴的下方,  $\angle AOP = 45^\circ$  知点 P 在第四象限,

如图 1, 过点 P 作  $PQ \perp x$  轴于点 Q,



则  $\angle POQ = \angle OPQ = 45^\circ$ ,

$$\text{可知 } PQ = OQ, \text{ 即 } \frac{m^2 + 8m}{4} = -\frac{m}{2},$$

$$\text{解得: } m_1 = 0, m_2 = -10,$$

当  $m = 0$  时, 点 P 不在第四象限, 舍去;

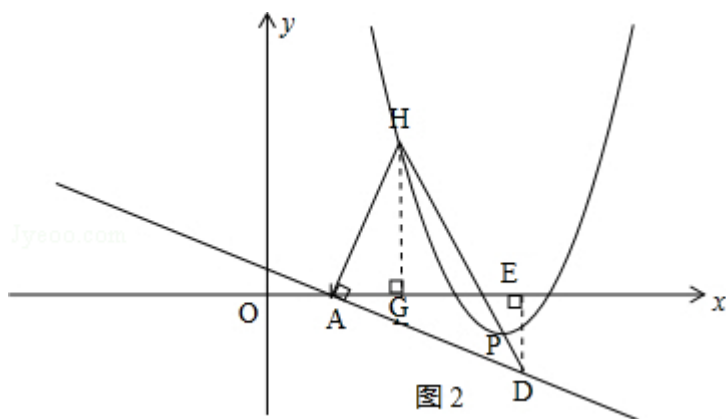
$$\therefore m = -10,$$

$$\therefore \text{抛物线的解析式为 } y = x^2 - 10x + 20;$$

(III) 由  $y = x^2 + mx - 2m = x^2 + m(x - 2)$  可知当  $x = 2$  时, 无论  $m$  取何值时  $y$  都等于 4,

$$\therefore \text{点 } H \text{ 的坐标为 } (2, 4),$$

过点 A 作  $AD \perp AH$ , 交射线 HP 于点 D, 分别过点 D、H 作 x 轴的垂线, 垂足分别为 E、G,



则  $\angle DEA = \angle AGH = 90^\circ$ ,

$\because \angle DAH = 90^\circ$ ,  $\angle AHD = 45^\circ$ ,

$\therefore \angle ADH = 45^\circ$ ,

$\therefore AH = AD$ ,

$\because \angle DAE + \angle HAG = \angle AHG + \angle HAG = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle DAE = \angle AHG$ ,

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle HAG$ ,

$\therefore DE = AG = 1$ 、 $AE = HG = 4$ ,

则点 D 的坐标为  $(-3, 1)$  或  $(5, -1)$ ;

①当点 D 的坐标为  $(-3, 1)$  时, 可得直线 DH 的解析式为  $y = \frac{3}{5}x + \frac{14}{5}$ ,

$\because$  点  $P(-\frac{m}{2}, -\frac{m^2+8m}{4})$  在直线  $y = \frac{3}{5}x + \frac{14}{5}$  上,

$$\therefore -\frac{m^2+8m}{4} = \frac{3}{5} \times (-\frac{m}{2}) + \frac{14}{5},$$

解得:  $m_1 = -4$ 、 $m_2 = -\frac{14}{5}$ ,

当  $m = -4$  时, 点 P 与点 H 重合, 不符合题意,

$\therefore m = -\frac{14}{5}$ ;

②当点 D 的坐标为  $(5, -1)$  时, 可得直线 DH 的解析式为  $y = -\frac{5}{3}x + \frac{22}{3}$ ,

$\because$  点  $P(-\frac{m}{2}, -\frac{m^2+8m}{4})$  在直线  $y = -\frac{5}{3}x + \frac{22}{3}$  上,

$$\therefore -\frac{m^2+8m}{4} = -\frac{5}{3} \times (-\frac{m}{2}) + \frac{22}{3},$$

解得:  $m_1 = -4$  (舍),  $m_2 = -\frac{22}{3}$ ,



综上,  $m = -\frac{14}{5}$  或  $m = -\frac{22}{3}$ ,

则抛物线的解析式为  $y = x^2 - \frac{14}{5}x + \frac{28}{5}$  或  $y = x^2 - \frac{22}{3}x + \frac{44}{3}$ .

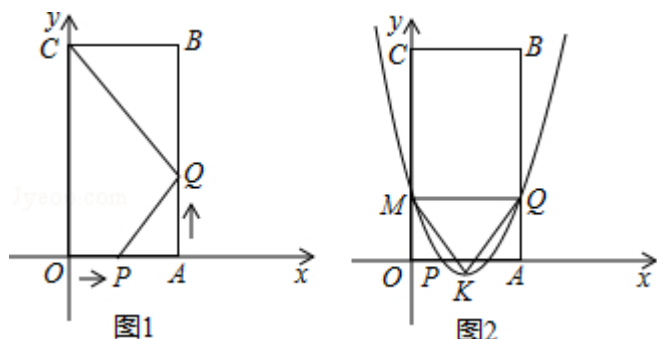
**【点评】** 本题主要考查二次函数综合问题, 解题的关键是掌握待定系数法求函数解析式、二次函数的性质、全等三角形的判定和性质等知识点.

9. 如图 1, 四边形 OABC 是矩形, 点 A 的坐标为 (3, 0), 点 C 的坐标为 (0, 6), 点 P 从点 O 出发, 沿 OA 以每秒 1 个单位长度的速度向点 A 出发, 同时点 Q 从点 A 出发, 沿 AB 以每秒 2 个单位长度的速度向点 B 运动, 当点 P 与点 A 重合时运动停止. 设运动时间为 t 秒.

(1) 当  $t=2$  时, 线段 PQ 的中点坐标为  $(\frac{5}{2}, 2)$ ;

(2) 当  $\triangle CBQ$  与  $\triangle PAQ$  相似时, 求 t 的值;

(3) 当  $t=1$  时, 抛物线  $y = x^2 + bx + c$  经过 P, Q 两点, 与 y 轴交于点 M, 抛物线的顶点为 K, 如图 2 所示, 问该抛物线上是否存在点 D, 使  $\angle MQD = \frac{1}{2} \angle MKQ$ ? 若存在, 求出所有满足条件的 D 的坐标; 若不存在, 说明理由.



**【分析】** (1) 先根据时间  $t=2$ , 和速度可得动点 P 和 Q 的路程 OP 和 AQ 的长, 再根据中点坐标公式可得结论;

(2) 根据矩形的性质得:  $\angle B = \angle PAQ = 90^\circ$ , 所以当  $\triangle CBQ$  与  $\triangle PAQ$  相似时, 存在两种情况:

①当  $\triangle PAQ \sim \triangle QBC$  时,  $\frac{PA}{AQ} = \frac{QB}{BC}$ , ②当  $\triangle PAQ \sim \triangle CBQ$  时,  $\frac{PA}{AQ} = \frac{BC}{BQ}$ , 分别列方程可得 t 的值;

(3) 根据  $t=1$  求抛物线的解析式, 根据  $Q(3, 2)$ ,  $M(0, 2)$ , 可得  $MQ \parallel x$  轴,  $\therefore KM = KQ$ ,  $KE \perp MQ$ , 画出符合条件的点 D, 证明  $\triangle KEQ \sim \triangle QMH$ , 列比例式可

得点 D 的坐标，同理根据对称可得另一个点 D.

【解答】解：（1）如图 1， $\because$  点 A 的坐标为  $(3, 0)$ ,

$$\therefore OA=3,$$

当  $t=2$  时,  $OP=t=2$ ,  $AQ=2t=4$ ,

$$\therefore P(2, 0), Q(3, 4),$$

$$\therefore \text{线段 PQ 的中点坐标为: } \left(\frac{2+3}{2}, \frac{0+4}{2}\right), \text{ 即 } \left(\frac{5}{2}, 2\right);$$

故答案为:  $\left(\frac{5}{2}, 2\right)$ ;

（2）如图 1， $\because$  当点 P 与点 A 重合时运动停止，且  $\triangle PAQ$  可以构成三角形，

$$\therefore 0 < t < 3,$$

$\because$  四边形 OABC 是矩形，

$$\therefore \angle B = \angle PAQ = 90^\circ$$

$\therefore$  当  $\triangle CBQ$  与  $\triangle PAQ$  相似时，存在两种情况：

$$\textcircled{1} \text{ 当 } \triangle PAQ \sim \triangle QBC \text{ 时, } \frac{PA}{AQ} = \frac{QB}{BC},$$

$$\therefore \frac{3-t}{2t} = \frac{6-2t}{3},$$

$$4t^2 - 15t + 9 = 0,$$

$$(t-3)\left(t-\frac{3}{4}\right) = 0,$$

$$t_1 = 3 \text{ (舍)}, t_2 = \frac{3}{4},$$

$$\textcircled{2} \text{ 当 } \triangle PAQ \sim \triangle CBQ \text{ 时, } \frac{PA}{AQ} = \frac{BC}{BQ},$$

$$\therefore \frac{3-t}{2t} = \frac{3}{6-2t},$$

$$t^2 - 9t + 9 = 0,$$

$$t = \frac{9 \pm 3\sqrt{5}}{2},$$

$$\therefore \frac{9+3\sqrt{5}}{2} > 7,$$

$$\therefore x = \frac{9+3\sqrt{5}}{2} \text{ 不符合题意, 舍去,}$$

综上所述，当  $\triangle CBQ$  与  $\triangle PAQ$  相似时， $t$  的值是  $\frac{3}{4}$  或  $\frac{9-3\sqrt{5}}{2}$ ;

（3）当  $t=1$  时,  $P(1, 0)$ ,  $Q(3, 2)$ ,

把 P (1, 0), Q (3, 2) 代入抛物线  $y=x^2+bx+c$  中得:

$$\begin{cases} 1+b+c=0 \\ 9+3b+c=2 \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} b=-3 \\ c=2 \end{cases},$$

$$\therefore \text{抛物线: } y=x^2-3x+2=(x-\frac{3}{2})^2-\frac{1}{4},$$

$$\therefore \text{顶点 } k(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}),$$

$$\because Q(3, 2), M(0, 2),$$

$$\therefore MQ \parallel x \text{ 轴},$$

作抛物线对称轴, 交 MQ 于 E,

$$\therefore KM=KQ, KE \perp MQ,$$

$$\therefore \angle MKE = \angle QKE = \frac{1}{2} \angle MKQ,$$

$$\text{如图 2, } \angle MQD = \frac{1}{2} \angle MKQ = \angle QKE,$$

设 DQ 交 y 轴于 H,

$$\because \angle HMQ = \angle QEK = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle KEQ \sim \triangle QMH,$$

$$\therefore \frac{KE}{EQ} = \frac{MQ}{MH},$$

$$\therefore \frac{2+\frac{1}{4}}{\frac{3}{2}} = \frac{3}{MH},$$

$$\therefore MH=2,$$

$$\therefore H(0, 4),$$

易得 HQ 的解析式为:  $y = -\frac{2}{3}x+4$ ,

$$\text{则 } \begin{cases} y = -\frac{2}{3}x+4 \\ y = x^2-3x+2 \end{cases},$$

$$x^2-3x+2 = -\frac{2}{3}x+4,$$

$$\text{解得: } x_1=3 \text{ (舍)}, x_2 = -\frac{2}{3},$$

$$\therefore D(-\frac{2}{3}, \frac{40}{9});$$

同理，在 M 的下方，y 轴上存在点 H，如图 3，使  $\angle HQM = \frac{1}{2} \angle MKQ = \angle QKE$ ，

由对称性得：H (0, 0)，

易得 OQ 的解析式：  $y = \frac{2}{3}x$ ，

$$\text{则} \begin{cases} y = \frac{2}{3}x \\ y = x^2 - 3x + 2 \end{cases},$$

$$x^2 - 3x + 2 = \frac{2}{3}x,$$

解得：  $x_1 = 3$  (舍)，  $x_2 = \frac{2}{3}$ ，

$\therefore D (\frac{2}{3}, \frac{4}{9})$ ;

综上所述，点 D 的坐标为：  $D (-\frac{2}{3}, \frac{40}{9})$  或  $(\frac{2}{3}, \frac{4}{9})$ .

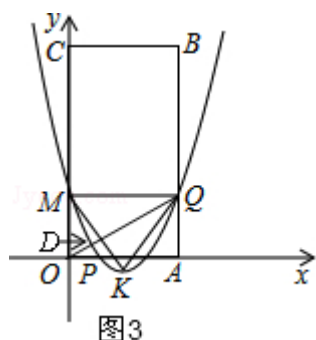


图3

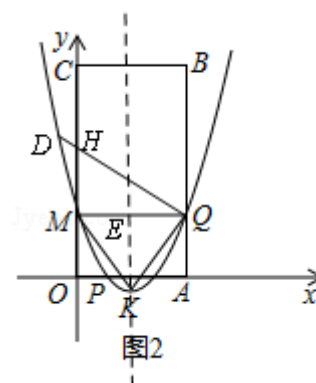


图2

**【点评】** 本题是二次函数与三角形相似的综合问题，主要考查相似三角形的判定和性质的综合应用，三角形和四边形的面积，二次函数的最值问题的应用，函数的交点等知识，本题比较复杂，注意用 t 表示出线段长度，再利用相似即可找到线段之间的关系，代入可解决问题。

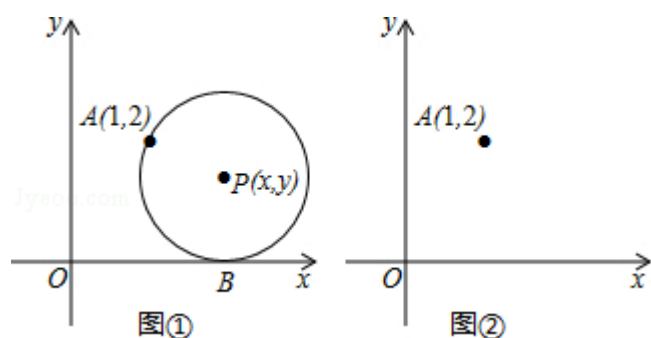
10. 如图①，在平面直角坐标系中，圆心为  $P(x, y)$  的动圆经过点  $A(1, 2)$  且与  $x$  轴相切于点  $B$ .

(1) 当  $x=2$  时，求  $\odot P$  的半径；

(2) 求  $y$  关于  $x$  的函数解析式，请判断此函数图象的形状，并在图②中画出此函数的图象；

(3) 请类比圆的定义（圆可以看成是到定点的距离等于定长的所有点的集合），给（2）中所得函数图象进行定义：此函数图象可以看成是到点  $A$  的距离等于到 $x$  轴 的距离的所有点的集合.

(4) 当  $\odot P$  的半径为 1 时，若  $\odot P$  与以上（2）中所得函数图象相交于点  $C$ 、 $D$ ，其中交点  $D(m, n)$  在点  $C$  的右侧，请利用图②，求  $\cos \angle APD$  的大小.



**【分析】** (1) 由题意得到  $AP=PB$ ，求出  $y$  的值，即为圆  $P$  的半径；

(2) 利用两点间的距离公式，根据  $AP=PB$ ，确定出  $y$  关于  $x$  的函数解析式，画出函数图象即可；

(3) 类比圆的定义描述此函数定义即可；

(4) 画出相应图形，求出  $m$  的值，进而确定出所求角的余弦值即可.

**【解答】** 解：(1) 由  $x=2$ ，得到  $P(2, y)$ ，  
连接  $AP$ ， $PB$ ，

$\because$  圆  $P$  与  $x$  轴相切，

$\therefore PB \perp x$  轴，即  $PB=y$ ，

由  $AP=PB$ ，得到  $\sqrt{(1-2)^2 + (2-y)^2} = y$ ，

解得：  $y = \frac{5}{4}$ ，

则圆  $P$  的半径为  $\frac{5}{4}$ ；

(2) 同 (1)，由  $AP=PB$ ，得到  $(x-1)^2 + (y-2)^2 = y^2$ ，

整理得： $y = \frac{1}{4}(x - 1)^2 + 1$ ，即图象为开口向上的抛物线，

画出函数图象, 如图②所示;

(3) 给(2)中所得函数图象进行定义: 此函数图象可以看成是到点 A 的距离等于到 x 轴的距离的所有点的集合;

故答案为：点 A；x 轴；

(4) 连接 CD, 连接 AP 并延长, 交 x 轴于点 B, CD 与 AF 交于点 E, 由对称性及切线的性质可得:  $CD \perp AB$ ,

设  $PE=a$ ，则有  $EB=a+1$ ， $ED=\sqrt{1-a^2}$ ，

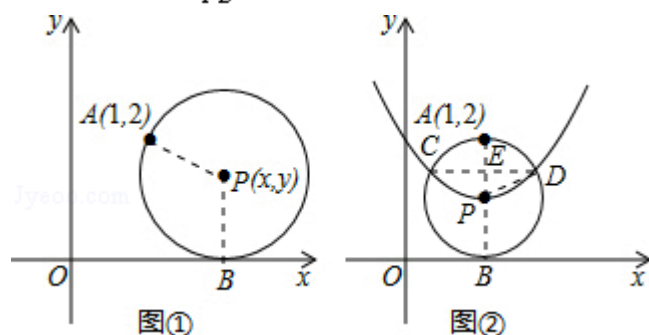
$\therefore D$  坐标为  $(1+\sqrt{1-a^2}, a+1)$ ,

代入抛物线解析式得： $a+1=\frac{1}{4}(1-a^2)+1$ ,

解得:  $a = -2 + \sqrt{5}$  或  $a = -2 - \sqrt{5}$  (舍去), 即  $PE = -2 + \sqrt{5}$ ,

在  $\text{Rt}\triangle PED$  中,  $PE=\sqrt{5}-2$ ,  $PD=1$ ,

则  $\cos \angle APD = \frac{PE}{PD} = \sqrt{5} - 2$ .



**【点评】**此题属于圆的综合题，涉及的知识有：两点间的距离公式，二次函数的图象与性质，圆的性质，勾股定理，弄清题意是解本题的关键.

11. 已知顶点为 A 抛物线  $y=a(x-\frac{1}{2})^2-2$  经过点  $B(-\frac{3}{2}, 2)$ , 点  $C(\frac{5}{2}, 2)$ .

(1) 求抛物线的解析式:

(2) 如图 1, 直线 AB 与 x 轴相交于点 M, y 轴相交于点 E, 抛物线与 y 轴相交于点 F, 在直线 AB 上有一点 P, 若  $\angle OPM = \angle MAF$ , 求  $\triangle POE$  的面积;

(3) 如图 2, 点 Q 是折线 A - B - C 上一点, 过点 Q 作  $QN \parallel y$  轴, 过点 E 作  $EN \parallel x$  轴, 直线 QN 与直线 EN 相交于点 N, 连接 QE, 将  $\triangle QEN$  沿 QE 翻折得到  $\triangle$

QEN<sub>1</sub>，若点 N<sub>1</sub> 落在 x 轴上，请直接写出 Q 点的坐标.

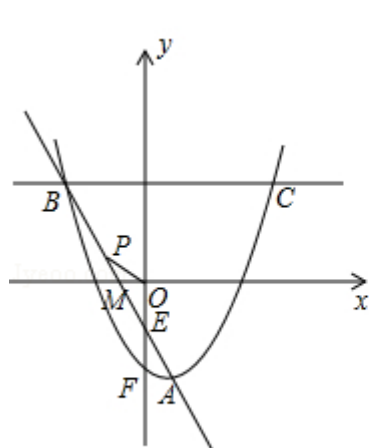


图1

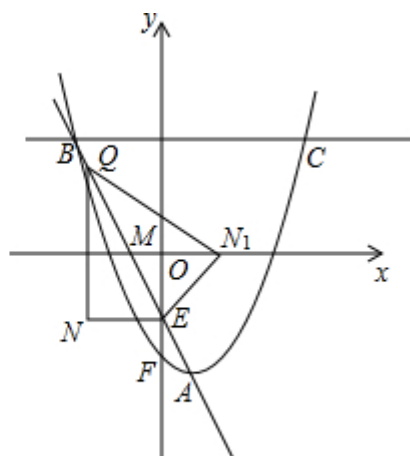


图2

【分析】(1) 将点 B 坐标代入解析式求得 a 的值即可得；

(2) 由  $\angle OPM = \angle MAF$  知  $OP \parallel AF$ ，据此证  $\triangle OPE \sim \triangle FAE$  得  $\frac{OP}{FA} = \frac{OE}{FE} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$ ，即

$OP = \frac{4}{3}FA$ ，设点 P (t, -2t - 1)，列出关于 t 的方程解之可得；

(3) 分点 Q 在 AB 上运动、点 Q 在 BC 上运动且 Q 在 y 轴左侧、点 Q 在 BC 上运动且点 Q 在 y 轴右侧这三种情况分类讨论即可得.

【解答】解：(1) 把点 B(- $\frac{3}{2}$ , 2) 代入  $y = a(x - \frac{1}{2})^2 - 2$ ，

解得：a=1，

$\therefore$  抛物线的解析式为：  $y = (x - \frac{1}{2})^2 - 2$ ；

(2) 由  $y = (x - \frac{1}{2})^2 - 2$  知 A ( $\frac{1}{2}$ , -2)，

设直线 AB 解析式为：  $y = kx + b$ ，代入点 A, B 的坐标，

$$\text{得：} \begin{cases} -2 = \frac{1}{2}k + b \\ 2 = -\frac{3}{2}k + b \end{cases},$$

$$\text{解得：} \begin{cases} k = -2 \\ b = -1 \end{cases},$$

$\therefore$  直线 AB 的解析式为：  $y = -2x - 1$ ，

易求 E (0, 1), F (0, - $\frac{7}{4}$ ), M (- $\frac{1}{2}$ , 0)，

若  $\angle OPM = \angle MAF$ ，

$$\therefore OP \parallel AF,$$

$$\therefore \triangle OPE \sim \triangle FAE,$$

$$\therefore \frac{OP}{FA} = \frac{OE}{FE} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3},$$

$$\therefore OP = \frac{4}{3}FA = \frac{4}{3}\sqrt{\left(\frac{1}{2}-6\right)^2 + \left(-2+\frac{7}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3},$$

$$\text{设点 } P(t, -2t-1), \text{ 则: } \sqrt{t^2 + (-2t-1)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\text{解得 } t_1 = -\frac{2}{15}, \quad t_2 = -\frac{2}{3},$$

由对称性知：当  $t_1 = -\frac{2}{15}$  时，也满足  $\angle OPM = \angle MAF$ ,

$$\therefore t_1 = -\frac{2}{15}, \quad t_2 = -\frac{2}{3} \text{ 都满足条件,}$$

$$\therefore \triangle POE \text{ 的面积} = \frac{1}{2} \cdot OE \cdot |t|,$$

$$\therefore \triangle POE \text{ 的面积为 } \frac{1}{15} \text{ 或 } \frac{1}{3}.$$

(3) 若点 Q 在 AB 上运动，如图 1，

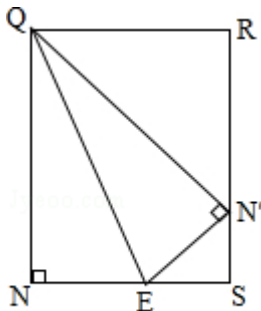


图 1

设  $Q(a, -2a-1)$ ，则  $NE = -a$ 、 $QN = -2a$ ，

由翻折知  $QN' = QN = -2a$ 、 $N'E = NE = -a$ ，

由  $\angle QN'E = \angle N = 90^\circ$  易知  $\triangle QRN' \sim \triangle N'SE$ ，

$$\therefore \frac{QR}{N'S} = \frac{RN'}{ES} = \frac{QN'}{EN'}, \text{ 即 } \frac{QR}{1} = \frac{-2a-1}{ES} = \frac{-2a}{-a},$$

$$\therefore QR = 2, \quad ES = \frac{-2a-1}{2},$$

$$\text{由 } NE + ES = NS = QR \text{ 可得 } -a + \frac{-2a-1}{2} = 2,$$



解得：  $a = -\frac{5}{4}$ ,

$$\therefore Q \left( -\frac{5}{4}, \frac{3}{2} \right);$$

若点 Q 在 BC 上运动，且 Q 在 y 轴左侧，如图 2，

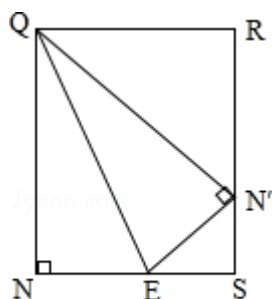


图 2

设  $NE=a$ ，则  $N'E=a$ ，

易知  $RN'=2$ 、 $SN'=1$ 、 $QN'=QN=3$ ，

$$\therefore QR=\sqrt{5}、SE=\sqrt{5}-a,$$

在  $Rt\triangle SEN'$  中， $(\sqrt{5}-a)^2+1^2=a^2$ ，

$$\text{解得： } a=\frac{3\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore Q \left( -\frac{3\sqrt{5}}{5}, 2 \right);$$

若点 Q 在 BC 上运动，且点 Q 在 y 轴右侧，如图 3，

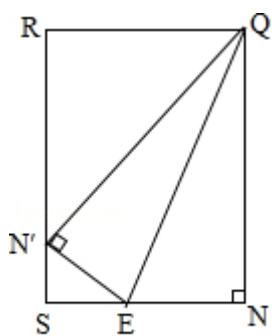


图 3

设  $NE=a$ ，则  $N'E=a$ ，

易知  $RN'=2$ 、 $SN'=1$ 、 $QN'=QN=3$ ，

$$\therefore QR=\sqrt{5}、SE=\sqrt{5}-a,$$

在  $Rt\triangle SEN'$  中， $(\sqrt{5}-a)^2+1^2=a^2$ ，

$$\text{解得： } a=\frac{3\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore Q\left(\frac{3\sqrt{5}}{5}, 2\right).$$

综上，点 Q 的坐标为  $\left(-\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right)$  或  $\left(-\frac{3\sqrt{5}}{5}, 2\right)$  或  $\left(\frac{3\sqrt{5}}{5}, 2\right)$ .

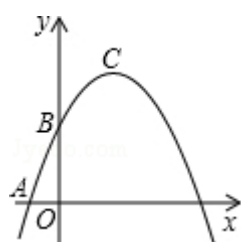
**【点评】** 本题主要考查二次函数的综合问题，解题的关键是掌握待定系数法求函数解析式、相似三角形的判定与性质、翻折变换的性质及勾股定理等知识点.

12. 在平面直角坐标系  $xOy$  中 (如图). 已知抛物线  $y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$  经过点 A  $(-1, 0)$  和点 B  $(0, \frac{5}{2})$ , 顶点为 C, 点 D 在其对称轴上且位于点 C 下方, 将线段 DC 绕点 D 按顺时针方向旋转  $90^\circ$ , 点 C 落在抛物线上的点 P 处.

(1) 求这条抛物线的表达式;

(2) 求线段 CD 的长;

(3) 将抛物线平移, 使其顶点 C 移到原点 O 的位置, 这时点 P 落在点 E 的位置, 如果点 M 在 y 轴上, 且以 O、D、E、M 为顶点的四边形面积为 8, 求点 M 的坐标.



**【分析】** (1) 利用待定系数法求抛物线解析式;

(2) 利用配方法得到  $y = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + \frac{9}{2}$ , 则根据二次函数的性质得到 C 点坐标和抛物线的对称轴为直线  $x=2$ , 如图, 设  $CD=t$ , 则  $D(2, \frac{9}{2}-t)$ , 根据旋转性质得  $\angle PDC=90^\circ$ ,  $DP=DC=t$ , 则  $P(2+t, \frac{9}{2}-t)$ , 然后把  $P(2+t, \frac{9}{2}-t)$  代入  $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{5}{2}$  得到关于 t 的方程, 从而解方程可得到 CD 的长;

(3) P 点坐标为  $(4, \frac{5}{2})$ , D 点坐标为  $(2, \frac{5}{2})$ , 利用抛物线的平移规律确定 E 点坐标为  $(2, -2)$ , 设  $M(0, m)$ , 当  $m > 0$  时, 利用梯形面积公式得到  $\frac{1}{2} \cdot (m + \frac{5}{2} + 2) \cdot 2 = 8$  当  $m < 0$  时, 利用梯形面积公式得到  $\frac{1}{2} \cdot (-m + \frac{5}{2} + 2) \cdot 2 = 8$ , 然后分别解方程求出 m 即可得到对应的 M 点坐标.

【解答】解：（1）把 A（-1，0）和点 B（0， $\frac{5}{2}$ ）代入  $y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$  得  $\begin{cases} -\frac{1}{2} - b + c = 0 \\ c = \frac{5}{2} \end{cases}$ ，

$$\text{解得} \begin{cases} b = 2 \\ c = \frac{5}{2} \end{cases},$$

$\therefore$  抛物线解析式为  $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{5}{2}$ ;

$$(2) \because y = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + \frac{9}{2},$$

$\therefore C(2, \frac{9}{2})$ ，抛物线的对称轴为直线  $x=2$ ，

如图，设  $CD=t$ ，则  $D(2, \frac{9}{2} - t)$ ，

$\because$  线段 DC 绕点 D 按顺时针方向旋转  $90^\circ$ ，点 C 落在抛物线上的点 P 处，

$\therefore \angle PDC = 90^\circ$ ， $DP = DC = t$ ，

$$\therefore P(2+t, \frac{9}{2} - t),$$

把  $P(2+t, \frac{9}{2} - t)$  代入  $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{5}{2}$  得  $-\frac{1}{2}(2+t)^2 + 2(2+t) + \frac{5}{2} = \frac{9}{2} - t$ ，

整理得  $t^2 - 2t = 0$ ，解得  $t_1 = 0$ （舍去）， $t_2 = 2$ ，

$\therefore$  线段 CD 的长为 2；

$$(3) P \text{ 点坐标为 } (4, \frac{5}{2}), D \text{ 点坐标为 } (2, \frac{5}{2}),$$

$\because$  抛物线平移，使其顶点 C（2， $\frac{9}{2}$ ）移到原点 O 的位置，

$\therefore$  抛物线向左平移 2 个单位，向下平移  $\frac{9}{2}$  个单位，

而 P 点（4， $\frac{5}{2}$ ）向左平移 2 个单位，向下平移  $\frac{9}{2}$  个单位得到点 E，

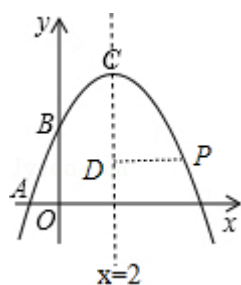
$\therefore E$  点坐标为（2，-2），

设 M（0，m），

当  $m > 0$  时， $\frac{1}{2} \cdot (m + \frac{5}{2} + 2) \cdot 2 = 8$ ，解得  $m = \frac{7}{2}$ ，此时 M 点坐标为（0， $\frac{7}{2}$ ）；

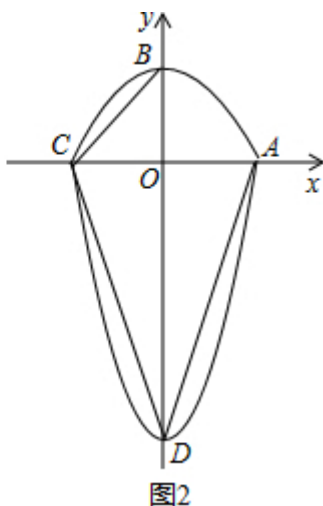
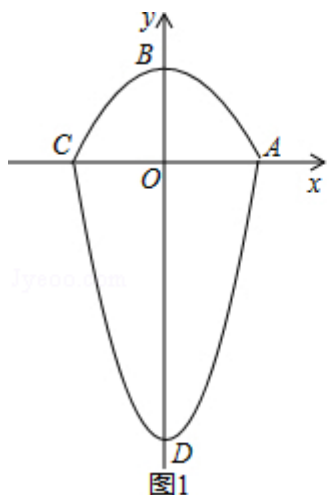
当  $m < 0$  时， $\frac{1}{2} \cdot (-m + \frac{5}{2} + 2) \cdot 2 = 8$ ，解得  $m = -\frac{7}{2}$ ，此时 M 点坐标为（0， $-\frac{7}{2}$ ）；

综上所述，M 点的坐标为（0， $\frac{7}{2}$ ）或（0， $-\frac{7}{2}$ ）。



【点评】本题考查了二次函数的综合题：熟练掌握二次函数图象上点的坐标特征、二次函数的性质和旋转的性质；会利用待定系数法求函数解析式；理解坐标与图形性质；会运用分类讨论的思想解决数学问题．

13. 如图 1，图形 ABCD 是由两个二次函数  $y_1=kx^2+m$  ( $k<0$ ) 与  $y_2=ax^2+b$  ( $a>0$ ) 的部分图象围成的封闭图形．已知 A (1, 0)、B (0, 1)、D (0, -3)．



- (1) 直接写出这两个二次函数的表达式；
- (2) 判断图形 ABCD 是否存在内接正方形（正方形的四个顶点在图形 ABCD 上），并说明理由；
- (3) 如图 2，连接 BC，CD，AD，在坐标平面内，求使得  $\triangle BDC$  与  $\triangle ADE$  相似（其中点 C 与点 E 是对应顶点）的点 E 的坐标

【分析】(1) 利用待定系数法即可得出结论；

(2) 先确定出  $MM' = (1 - m^2) - (3m^2 - 3) = 4 - 4m^2$ ，进而建立方程  $2m = 4 - 4m^2$ ，即可得出结论；

(3) 先利用勾股定理求出  $AD = \sqrt{10}$ ，同理：  $CD = \sqrt{10}$ ，  $BC = \sqrt{2}$ ，再分两种情况：

①如图 1，当  $\triangle DBC \sim \triangle DAE$  时，得出  $\frac{DB}{DA} = \frac{DC}{DE}$ ，进而求出  $DE = \frac{5}{2}$ ，即可得出 E (0,

$$-\frac{1}{2}),$$

再判断出 $\triangle DEF \sim \triangle DAO$ , 得出 $\frac{DE}{DA} = \frac{DF}{DO} = \frac{EF}{AO}$ , 求出 $DF = \frac{3\sqrt{10}}{4}$ ,  $EF = \frac{\sqrt{10}}{4}$ , 再用面积法求出 $E'M = \frac{3}{2}$ , 即可得出结论;

②如图 2, 当 $\triangle DBC \sim \triangle ADE$  时, 得出 $\frac{DB}{AD} = \frac{DC}{AE}$ , 求出 $AE = \frac{5}{2}$ ,

当 E 在直线 AD 左侧时, 先利用勾股定理求出 $PA = \frac{5}{3}$ ,  $PO = \frac{4}{3}$ , 进而得出 $PE = \frac{5}{6}$ ,

再判断出 $\frac{AP}{PE} = \frac{AO}{OQ}$ 即可得出点 E 坐标, 当 E' 在直线 DA 右侧时, 即可得出结论.

**【解答】**解: (1)  $\because$  点 A (1, 0), B (0, 1) 在二次函数  $y_1 = kx^2 + m$  ( $k < 0$ ) 的图象上,

$$\therefore \begin{cases} k+m=0, \\ m=1 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} k=-1, \\ m=1 \end{cases}$$

$\therefore$  二次函数解析式为  $y_1 = -x^2 + 1$ ,

$\because$  点 A (1, 0), D (0, -3) 在二次函数  $y_2 = ax^2 + b$  ( $a > 0$ ) 的图象上,

$$\therefore \begin{cases} a+b=0, \\ b=-3 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} a=3, \\ b=-3 \end{cases}$$

$\therefore$  二次函数  $y_2 = 3x^2 - 3$ ;

(2) 设 M (m,  $-m^2 + 1$ ) 为第一象限内的图形 ABCD 上一点, M' (m,  $3m^2 - 3$ ) 为第四象限的图形上一点,

$$\therefore MM' = (1 - m^2) - (3m^2 - 3) = 4 - 4m^2,$$

由抛物线的对称性知, 若有内接正方形,

$$\therefore 2m = 4 - 4m^2,$$

$$\therefore m = \frac{-1 + \sqrt{17}}{4} \text{ 或 } m = \frac{-1 - \sqrt{17}}{4} \text{ (舍)},$$

$$\because 0 < \frac{-1 + \sqrt{17}}{4} < 1,$$

$$\therefore MM' = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$$

$\therefore$  存在内接正方形, 此时其边长为  $\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$ ;

(3) 在  $\text{Rt}\triangle AOD$  中,  $OA=1$ ,  $OD=3$ ,

$$\therefore AD = \sqrt{OA^2 + OD^2} = \sqrt{10},$$

同理:  $CD = \sqrt{10}$ ,

在  $\text{Rt}\triangle BOC$  中,  $OB=OC=1$ ,

$$\therefore BC = \sqrt{OC^2 + OB^2} = \sqrt{2},$$

①如图 1, 当  $\triangle DBC \sim \triangle DAE$  时,

$$\because \angle CDB = \angle ADO,$$

$$\therefore \text{在 } y \text{ 轴上存在 } E, \text{ 由 } \frac{DB}{DA} = \frac{DC}{DE},$$

$$\therefore \frac{4}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{DE},$$

$$\therefore DE = \frac{5}{2},$$

$$\therefore D(0, -3),$$

$$\therefore E(0, -\frac{1}{2}),$$

由对称性知, 在直线  $DA$  右侧还存在一点  $E'$  使得  $\triangle DBC \sim \triangle DAE'$ ,

连接  $EE'$  交  $DA$  于  $F$  点, 作  $E'M \perp OD$  于  $M$ , 连接  $E'D$ ,

$$\because E, E' \text{ 关于 } DA \text{ 对称},$$

$$\therefore DF \text{ 垂直平分线 } EE',$$

$$\therefore \triangle DEF \sim \triangle DAO,$$

$$\therefore \frac{DE}{DA} = \frac{DF}{DO} = \frac{EF}{AO},$$

$$\therefore \frac{2.5}{\sqrt{10}} = \frac{DF}{3} = \frac{EF}{1},$$

$$\therefore DF = \frac{3\sqrt{10}}{4}, EF = \frac{\sqrt{10}}{4},$$

$$\therefore S_{\triangle DEE'} = \frac{1}{2} DE \cdot E'M = EF \times DF = \frac{15}{8},$$

$$\therefore E'M = \frac{3}{2},$$

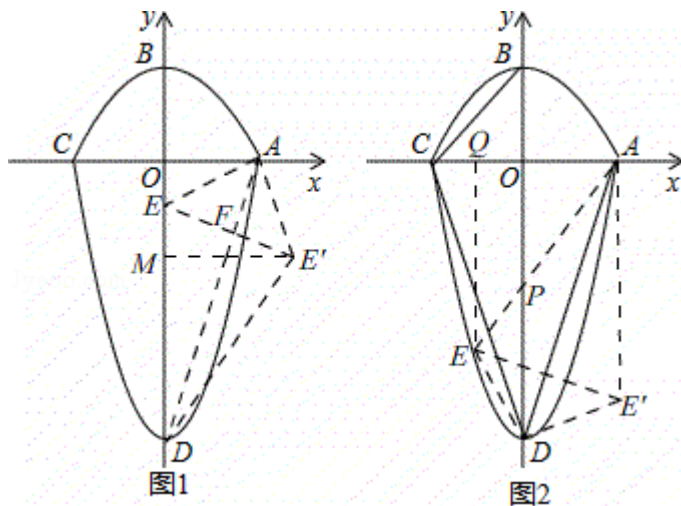
$$\therefore DE' = DE = \frac{5}{2},$$

在  $\text{Rt}\triangle DE'M$  中,  $DM = \sqrt{DE'^2 - E'M^2} = 2$ ,

$$\therefore OM=1,$$

$$\therefore E' \left( \frac{3}{2}, -1 \right),$$

②如图 2,



当  $\triangle DBC \sim \triangle ADE$  时, 有  $\angle BDC = \angle DAE$ ,  $\frac{DB}{AD} = \frac{DC}{AE}$ ,

$$\therefore \frac{4}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{AE},$$

$$\therefore AE = \frac{5}{2},$$

当 E 在直线 AD 左侧时, 设 AE 交 y 轴于 P, 作  $EQ \perp AC$  于 Q,

$$\because \angle BDC = \angle DAE = \angle ODA,$$

$$\therefore PD = PA,$$

设  $PD = n$ ,

$$\therefore PO = 3 - n, PA = n,$$

在  $Rt\triangle AOP$  中,  $PA^2 = OA^2 + OP^2$ ,

$$\therefore n^2 = (3 - n)^2 + 1,$$

$$\therefore n = \frac{5}{3},$$

$$\therefore PA = \frac{5}{3}, PO = \frac{4}{3},$$

$$\because AE = \frac{5}{2},$$

$$\therefore PE = \frac{5}{6},$$

在  $AEQ$  中,  $OP \parallel EQ$ ,

$$\therefore \frac{AP}{PE} = \frac{AO}{OQ},$$

$$\therefore OQ = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{OP}{PE} = \frac{AP}{AE} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore QE = 2,$$

$$\therefore E \left( -\frac{1}{2}, -2 \right),$$

当  $E'$  在直线  $DA$  右侧时,

$$\text{根据勾股定理得, } AE = \sqrt{AQ^2 + QE^2} = \frac{5}{2},$$

$$\therefore AE' = \frac{5}{2}$$

$$\because \angle DAE' = \angle BDC, \angle BDC = \angle BDA,$$

$$\therefore \angle BDA = \angle DAE',$$

$$\therefore AE' \parallel OD,$$

$$\therefore E' \left( 1, -\frac{5}{2} \right),$$

综上, 使得  $\triangle BDC$  与  $\triangle ADE$  相似 (其中点  $C$  与  $E$  是对应顶点) 的点  $E$  的坐标有 4 个,

$$\text{即: } \left( 0, -\frac{1}{2} \right) \text{ 或 } \left( \frac{3}{2}, -1 \right) \text{ 或 } \left( 1, -\frac{5}{2} \right) \text{ 或 } \left( -\frac{1}{2}, -2 \right).$$

**【点评】** 此题是二次函数综合题, 主要考查了待定系数法, 勾股定理, 相似三角形的判定和性质, 对称性, 正确作出辅助线和用分类讨论的思想是解本题的关键.

14. 小贤与小杰在探究某类二次函数问题时, 经历了如下过程:

求解体验:

(1) 已知抛物线  $y = -x^2 + bx - 3$  经过点  $(-1, 0)$ , 则  $b = \underline{-4}$ , 顶点坐标为  $\underline{(-2, 1)}$ , 该抛物线关于点  $(0, 1)$  成中心对称的抛物线表达式是  $\underline{y = x^2 - 4x + 5}$ .

抽象感悟:

我们定义: 对于抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ), 以  $y$  轴上的点  $M(0, m)$  为中心, 作该抛物线关于点  $M$  对称的抛物线  $y'$ , 则我们又称抛物线  $y'$  为抛物线  $y$  的“衍生抛物线”, 点  $M$  为“衍生中心”.

(2) 已知抛物线  $y = -x^2 - 2x + 5$  关于点  $(0, m)$  的衍生抛物线为  $y'$ , 若这两条抛



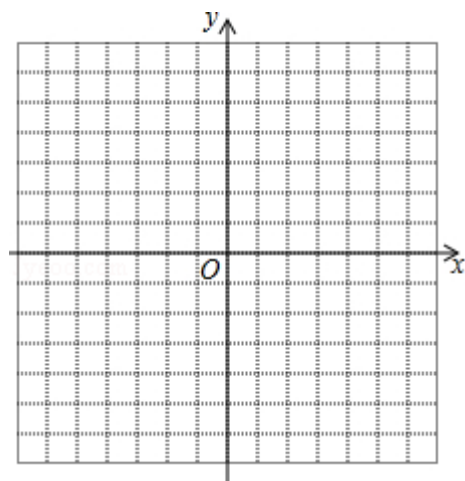
物线有交点，求  $m$  的取值范围.

问题解决：

(3) 已知抛物线  $y=ax^2+2ax-b$  ( $a \neq 0$ )

①若抛物线  $y$  的衍生抛物线为  $y'=bx^2-2bx+a^2$  ( $b \neq 0$ )，两抛物线有两个交点，且恰好是它们的顶点，求  $a$ 、 $b$  的值及衍生中心的坐标；

②若抛物线  $y$  关于点  $(0, k+1^2)$  的衍生抛物线为  $y_1$ ，其顶点为  $A_1$ ；关于点  $(0, k+2^2)$  的衍生抛物线为  $y_2$ ，其顶点为  $A_2$ ；...；关于点  $(0, k+n^2)$  的衍生抛物线为  $y_n$ ，其顶点为  $A_n$ ... ( $n$  为正整数). 求  $A_n A_{n+1}$  的长 (用含  $n$  的式子表示).



**【分析】** 求解体验：(1) 利用待定系数法求出  $b$  的值，进而求出顶点坐标，在抛物线上取一点  $(0, -3)$ ，求出点  $(-2, 1)$  和  $(0, -3)$  关于  $(0, 1)$  的对称点坐标，利用待定系数法即可得出结论；

抽象感悟：(2) 求出抛物线的顶点坐标  $(-1, 6)$ ，再在抛物线上取一点  $(0, 5)$ ，求出此两点关于  $(0, m)$  的对称点  $(1, 2m-6)$  和  $(0, 2m-5)$ ，利用待定系数法求出衍生函数解析式，联立即可得出结论；

问题解决：(3) ①求出抛物线的顶点坐标和衍生抛物线的顶点坐标，分别代入抛物线解析式中，即可求出  $a$ 、 $b$  的值，即可得出结论；

②求出抛物线顶点关于  $(0, k+n^2)$  和  $(0, k+(n+1)^2)$  的对称点坐标，即可得出结论.

**【解答】** 解：求解体验：(1)  $\because$  抛物线  $y=-x^2+bx-3$  经过点  $(-1, 0)$ ,

$$\therefore -1-b-3=0,$$

$$\therefore b=-4,$$

∴ 抛物线解析式为  $y = -x^2 - 4x - 3 = -(x+2)^2 + 1$ ,

∴ 抛物线的顶点坐标为  $(-2, 1)$ ,

∴ 抛物线的顶点坐标  $(-2, 1)$  关于  $(0, 1)$  的对称点为  $(2, 1)$ ,

即：新抛物线的顶点坐标为  $(2, 1)$ ,

令原抛物线的  $x=0$ ,

∴  $y = -3$ ,

∴  $(0, -3)$  关于点  $(0, 1)$  的对称点坐标为  $(0, 5)$ ,

设新抛物线的解析式为  $y = a(x-2)^2 + 1$ ,

∵ 点  $(0, 5)$  在新抛物线上,

∴  $5 = a(0-2)^2 + 1$ ,

∴  $a = 1$ ,

∴ 新抛物线解析式为  $y = (x-2)^2 + 1 = x^2 - 4x + 5$ ,

故答案为  $-4, (-2, 1), y = x^2 - 4x + 5$ ;

抽象感悟：(2) ∵ 抛物线  $y = -x^2 - 2x + 5 = -(x+1)^2 + 6$ ①,

∴ 抛物线的顶点坐标为  $(-1, 6)$ ,

抛物线上取点  $(0, 5)$ ,

∴ 点  $(-1, 6)$  和  $(0, 5)$  关于点  $(0, m)$  的对称点为  $(1, 2m-6)$  和  $(0, 2m-5)$ ,

设衍生抛物线为  $y' = a(x-1)^2 + 2m - 6$ , ∴  $2m - 5 = a + 2m - 6$ ,

∴  $a = 1$ ,

∴ 衍生抛物线为  $y' = (x-1)^2 + 2m - 6 = x^2 - 2x + 2m - 5$ ②,

联立①②得,  $x^2 - 2x + 2m - 5 = -x^2 - 2x + 5$ ,

整理得,  $2x^2 = 10 - 2m$ ,

∵ 这两条抛物线有交点,

∴  $10 - 2m \geq 0$ ,

∴  $m \leq 5$ ;

问题解决:

(3) ①抛物线  $y=ax^2+2ax-b=a(x+1)^2-a-b$ ,

$\therefore$  此抛物线的顶点坐标为  $(-1, -a-b)$ ,

$\therefore$  抛物线  $y$  的衍生抛物线为  $y'=bx^2-2bx+a^2=b(x-1)^2+a^2-b$ ,

$\therefore$  此函数的顶点坐标为  $(1, a^2-b)$ ,

$\therefore$  两个抛物线有两个交点, 且恰好是它们的顶点,

$$\therefore \begin{cases} b+2b+a^2=-a-b, \\ a+2a-b=a^2-b, \end{cases}$$

$\therefore a=0$  (舍) 或  $a=3$ ,

$\therefore b=-3$ ,

$\therefore$  抛物线  $y$  的顶点坐标为  $(-1, 0)$ , 抛物线  $y$  的衍生抛物线的顶点坐标为  $(1, 12)$ ,

$\therefore$  衍生中心的坐标为  $(0, 6)$ ;

②抛物线  $y=ax^2+2ax-b$  的顶点坐标为  $(-1, -a-b)$ ,

$\therefore$  点  $(-1, -a-b)$  关于点  $(0, k+n^2)$  的对称点为  $(1, a+b+2k+2n^2)$ ,

$\therefore$  抛物线  $y_n$  的顶点坐标  $A_n$  为  $(1, a+b+2k+2n^2)$ ,

同理:  $A_{n+1}(1, a+b+2k+2(n+1)^2)$

$\therefore A_n A_{n+1} = a+b+2k+2(n+1)^2 - (a+b+2k+2n^2) = 4n+2$ .

**【点评】**此题是二次函数综合题, 主要考查了待定系数法, 抛物线顶点坐标的求法, 新定义的理解和掌握, 点的对称点坐标的求法, 理解新定义是解本题的关键.

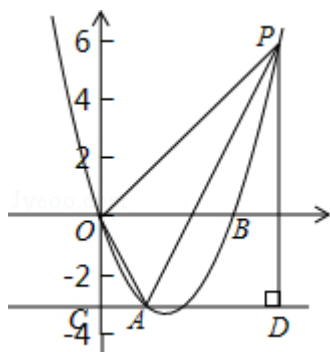
15. 如图, 已知抛物线  $y=ax^2+bx$  ( $a \neq 0$ ) 过点  $A(\sqrt{3}, -3)$  和点  $B(3\sqrt{3}, 0)$ . 过点  $A$  作直线  $AC \parallel x$  轴, 交  $y$  轴于点  $C$ .

(1) 求抛物线的解析式;

(2) 在抛物线上取一点  $P$ , 过点  $P$  作直线  $AC$  的垂线, 垂足为  $D$ . 连接  $OA$ , 使得以  $A, D, P$  为顶点的三角形与  $\triangle AOC$  相似, 求出对应点  $P$  的坐标;

(3) 抛物线上是否存在点  $Q$ , 使得  $S_{\triangle AOC} = \frac{1}{3} S_{\triangle AOQ}$ ? 若存在, 求出点  $Q$  的坐标;

若不存在, 请说明理由.



【分析】(1) 把 A 与 B 坐标代入抛物线解析式求出 a 与 b 的值，即可确定出解析式；

(2) 设 P 坐标为  $(x, \frac{1}{2}x^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}x)$ ，表示出 AD 与 PD，由相似分两种情况得比例求出 x 的值，即可确定出 P 坐标；

(3) 存在，求出已知三角形 AOC 边 OA 上的高 h，过 O 作  $OM \perp OA$ ，截取  $OM=h$ ，与 y 轴交于点 N，分别确定出 M 与 N 坐标，利用待定系数法求出直线 MN 解析式，与抛物线解析式联立求出 Q 坐标即可。

【解答】解：(1) 把 A  $(\sqrt{3}, -3)$  和点 B  $(3\sqrt{3}, 0)$  代入抛物线得：
$$\begin{cases} 3a + \sqrt{3}b = -3 \\ 27a + 3\sqrt{3}b = 0 \end{cases}$$

解得：  $a = \frac{1}{2}$ ,  $b = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ,

则抛物线解析式为  $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}x$ ;

(2) 当 P 在直线 AD 上方时，

设 P 坐标为  $(x, \frac{1}{2}x^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}x)$ ，则有  $AD = x - \sqrt{3}$ ,  $PD = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}x + 3$ ,

当  $\triangle OCA \sim \triangle ADP$  时，  $\frac{OC}{AD} = \frac{CA}{DP}$ ，即  $\frac{3}{x - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{1}{2}x^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}x + 3}$ ,

整理得：  $3x^2 - 9\sqrt{3}x + 18 = 2\sqrt{3}x - 6$ ，即  $3x^2 - 11\sqrt{3}x + 24 = 0$ ,

解得：  $x = \frac{11\sqrt{3} \pm 5\sqrt{3}}{6}$ ，即  $x = \frac{8\sqrt{3}}{3}$  或  $x = \sqrt{3}$  (舍去)，

此时 P  $(\frac{8\sqrt{3}}{3}, -\frac{4}{3})$ ;

当  $\triangle OCA \sim \triangle PDA$  时，  $\frac{OC}{PD} = \frac{CA}{AD}$ ，即  $\frac{3}{\frac{1}{2}x^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}x + 3} = \frac{\sqrt{3}}{x - \sqrt{3}}$ ,

整理得：  $\sqrt{3}x^2 - 9x + 6\sqrt{3} = 6x - 6\sqrt{3}$ ，即  $x^2 - 5\sqrt{3}x + 12 = 0$ ,

解得:  $x = \frac{5\sqrt{3} \pm 3\sqrt{3}}{2}$ , 即  $x = 4\sqrt{3}$  或  $\sqrt{3}$  (舍去),

此时  $P(4\sqrt{3}, 6)$ ;

当 P 在直线 AD 下方时，同理可得：P 的坐标为  $(\frac{4\sqrt{3}}{3}, -\frac{10}{3})$  或  $(0, 0)$ ，

综上, P 的坐标为  $(\frac{8\sqrt{3}}{3}, -\frac{4}{3})$  或  $(4\sqrt{3}, 6)$  或  $(\frac{4\sqrt{3}}{3}, -\frac{10}{3})$  或  $(0, 0)$ ;

(3) 在  $\text{Rt}\triangle AOC$  中,  $OC=3$ ,  $AC=\sqrt{3}$ ,

根据勾股定理得：OA=2 $\sqrt{3}$ ，

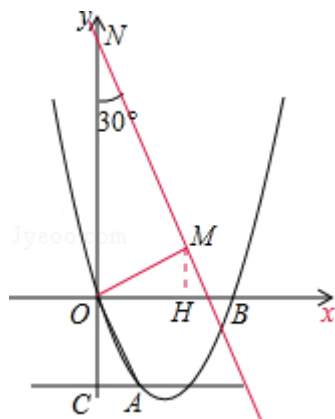
$$\therefore \frac{1}{2}OC \cdot AC = \frac{1}{2}OA \cdot h,$$

$$\therefore h = \frac{3}{2},$$

$$\therefore S_{\triangle AOC} = \frac{1}{3} S_{\triangle AOQ} = \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore \triangle AOQ \text{ 边 } OA \text{ 上的高为 } \frac{9}{2},$$

过 O 作  $OM \perp OA$ ，截取  $OM = \frac{9}{2}$ ，过 M 作  $MN \parallel OA$ ，交 y 轴于点 N，如图所示：



在  $\text{Rt}\triangle OMN$  中,  $ON=2OM=9$ , 即  $N(0, 9)$ ,

过 M 作  $MH \perp x$  轴,

在  $\text{Rt}\triangle OMH$  中,  $MH = \frac{1}{2}OM = \frac{9}{4}$ ,  $OH = \frac{\sqrt{3}}{2}OM = \frac{9\sqrt{3}}{4}$ , 即  $M(\frac{9\sqrt{3}}{4}, \frac{9}{4})$ ,

设直线 MN 解析式为  $y=kx+9$ ,

把 M 坐标代入得:  $\frac{9}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{4}k + 9$ , 即  $k = -\sqrt{3}$ , 即  $y = -\sqrt{3}x + 9$ ,

联立得: 
$$\begin{cases} y = -\sqrt{3}x + 9 \\ y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}x \end{cases},$$

解得：  $\begin{cases} x=3\sqrt{3} \\ y=0 \end{cases}$  或  $\begin{cases} x=-2\sqrt{3} \\ y=15 \end{cases}$ ，即  $Q(3\sqrt{3}, 0)$  或  $(-2\sqrt{3}, 15)$ ，

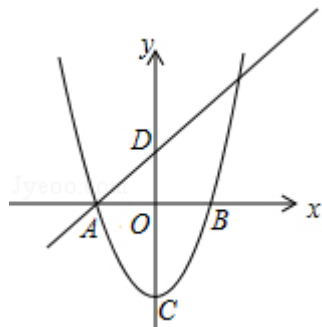
则抛物线上存在点  $Q$ ，使得  $S_{\triangle AOC} = \frac{1}{3}S_{\triangle AOQ}$ ，此时点  $Q$  的坐标为  $(3\sqrt{3}, 0)$  或  $(-2\sqrt{3}, 15)$ 。

**【点评】** 此题属于二次函数综合题，涉及的知识有：待定系数法求函数解析式，相似三角形的判定与性质，点到直线的距离公式，熟练掌握待定系数法是解本题的关键。

16. 如图，已知抛物线  $y=x^2-4$  与  $x$  轴交于点  $A, B$ （点  $A$  位于点  $B$  的左侧）， $C$  为顶点，直线  $y=x+m$  经过点  $A$ ，与  $y$  轴交于点  $D$ 。

(1) 求线段  $AD$  的长；

(2) 平移该抛物线得到一条新抛物线，设新抛物线的顶点为  $C'$ 。若新抛物线经过点  $D$ ，并且新抛物线的顶点和原抛物线的顶点的连线  $CC'$  平行于直线  $AD$ ，求新抛物线对应的函数表达式。



**【分析】** (1) 解方程求出点  $A$  的坐标，根据勾股定理计算即可；

(2) 设新抛物线对应的函数表达式为：  $y=x^2+bx+2$ ，根据二次函数的性质求出点  $C'$  的坐标，根据题意求出直线  $CC'$  的解析式，代入计算即可。

**【解答】** 解：(1) 由  $x^2-4=0$  得，  $x_1=-2$ ，  $x_2=2$ ，

$\because$  点  $A$  位于点  $B$  的左侧，

$\therefore A(-2, 0)$ ，

$\because$  直线  $y=x+m$  经过点  $A$ ，

$\therefore -2+m=0$ ，

解得，  $m=2$ ，

$\therefore$  点  $D$  的坐标为  $(0, 2)$ ，

$$\therefore AD = \sqrt{OA^2 + OD^2} = 2\sqrt{2};$$

(2) 设新抛物线对应的函数表达式为:  $y = x^2 + bx + 2$ ,

$$y = x^2 + bx + 2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + 2 - \frac{b^2}{4},$$

则点  $C'$  的坐标为  $\left(-\frac{b}{2}, 2 - \frac{b^2}{4}\right)$ ,

$\because CC'$  平行于直线  $AD$ , 且经过  $C(0, -4)$ ,

$\therefore$  直线  $CC'$  的解析式为:  $y = x - 4$ ,

$$\therefore 2 - \frac{b^2}{4} = -\frac{b}{2} - 4,$$

解得,  $b_1 = -4$ ,  $b_2 = 6$ ,

$\therefore$  新抛物线对应的函数表达式为:  $y = x^2 - 4x + 2$  或  $y = x^2 + 6x + 2$ .

**【点评】** 本题考查的是抛物线与  $x$  轴的交点、待定系数法求函数解析式, 掌握二次函数的性质、抛物线与  $x$  轴的交点的求法是解题的关键.

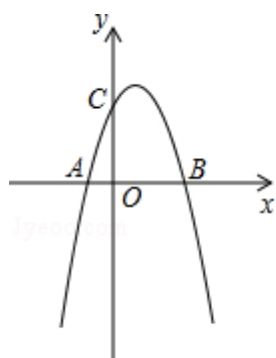
17. 如图①, 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 抛物线  $y = ax^2 + bx + 3$  经过点  $A(-1, 0)$ 、 $B(3, 0)$  两点, 且与  $y$  轴交于点  $C$ .

(1) 求抛物线的表达式;

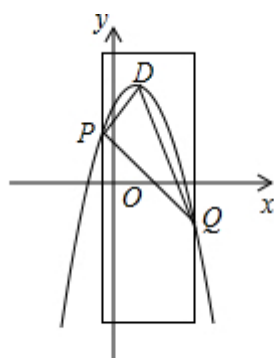
(2) 如图②, 用宽为 4 个单位长度的直尺垂直于  $x$  轴, 并沿  $x$  轴左右平移, 直尺的左右两边所在的直线与抛物线相交于  $P$ 、 $Q$  两点 (点  $P$  在点  $Q$  的左侧), 连接  $PQ$ , 在线段  $PQ$  上方抛物线上有一动点  $D$ , 连接  $DP$ 、 $DQ$ .

(1) 若点  $P$  的横坐标为  $-\frac{1}{2}$ , 求  $\triangle DPQ$  面积的最大值, 并求此时点  $D$  的坐标;

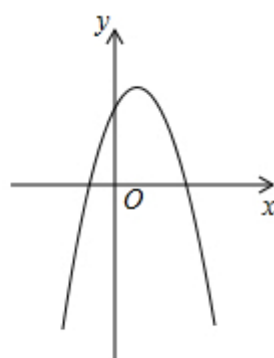
(II) 直尺在平移过程中,  $\triangle DPQ$  面积是否有最大值? 若有, 求出面积的最大值; 若没有, 请说明理由.



图①



图②



备用图

【分析】(1) 根据点 A、B 的坐标，利用待定系数法即可求出抛物线的表达式；

(2) (I) 由点 P 的横坐标可得出点 P、Q 的坐标，利用待定系数法可求出直线 PQ 的表达式，过点 D 作  $DE \parallel y$  轴交直线 PQ 于点 E，设点 D 的坐标为  $(x, -x^2+2x+3)$ ，则点 E 的坐标为  $(x, -x+\frac{5}{4})$ ，进而即可得出 DE 的长度，利用三角形的面积公式可得出  $S_{\triangle DPQ} = -2x^2+6x+\frac{7}{2}$ ，再利用二次函数的性质即可解决最值问题；

(II) 假设存在，设点 P 的横坐标为 t，则点 Q 的横坐标为  $4+t$ ，进而可得出点 P、Q 的坐标，利用待定系数法可求出直线 PQ 的表达式，设点 D 的坐标为  $(x, -x^2+2x+3)$ ，则点 E 的坐标为  $(x, -2(t+1)x+t^2+4t+3)$ ，进而即可得出 DE 的长度，利用三角形的面积公式可得出  $S_{\triangle DPQ} = -2x^2+4(t+2)x-2t^2-8t$ ，再利用二次函数的性质即可解决最值问题。

【解答】解：(1) 将 A  $(-1, 0)$ 、B  $(3, 0)$  代入  $y=ax^2+bx+3$ ，得：

$$\begin{cases} a-b+3=0 \\ 9a+3b+3=0 \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} a=-1 \\ b=2 \end{cases},$$

$\therefore$  抛物线的表达式为  $y = -x^2+2x+3$ 。

(2) (I) 当点 P 的横坐标为  $-\frac{1}{2}$  时，点 Q 的横坐标为  $\frac{7}{2}$ ，

$\therefore$  此时点 P 的坐标为  $(-\frac{1}{2}, \frac{7}{4})$ ，点 Q 的坐标为  $(\frac{7}{2}, -\frac{9}{4})$ 。

设直线 PQ 的表达式为  $y=mx+n$ ，

将 P  $(-\frac{1}{2}, \frac{7}{4})$ 、Q  $(\frac{7}{2}, -\frac{9}{4})$  代入  $y=mx+n$ ，得：

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}m+n=\frac{7}{4} \\ \frac{7}{2}m+n=-\frac{9}{4} \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} m=-1 \\ n=\frac{5}{4} \end{cases},$$

$\therefore$  直线 PQ 的表达式为  $y = -x+\frac{5}{4}$ 。

如图②，过点 D 作  $DE \parallel y$  轴交直线 PQ 于点 E，

设点 D 的坐标为  $(x, -x^2+2x+3)$ ，则点 E 的坐标为  $(x, -x+\frac{5}{4})$ ，

$$\therefore DE = -x^2+2x+3 - (-x+\frac{5}{4}) = -x^2+3x+\frac{7}{4},$$

$$\therefore S_{\triangle DPQ} = \frac{1}{2}DE \cdot (x_Q - x_P) = -2x^2+6x+\frac{7}{2} = -2(x - \frac{3}{2})^2+8.$$

$\therefore -2 < 0$ ,



∴当  $x=\frac{3}{2}$  时,  $\triangle DPQ$  的面积取最大值, 最大值为 8, 此时点 D 的坐标为  $(\frac{3}{2}, \frac{15}{4})$ .

(II) 假设存在, 设点 P 的横坐标为 t, 则点 Q 的横坐标为 4+t,

∴点 P 的坐标为  $(t, -t^2+2t+3)$ , 点 Q 的坐标为  $(4+t, -(4+t)^2+2(4+t)+3)$ ,

利用待定系数法易知, 直线 PQ 的表达式为  $y=-2(t+1)x+t^2+4t+3$ .

设点 D 的坐标为  $(x, -x^2+2x+3)$ , 则点 E 的坐标为  $(x, -2(t+1)x+t^2+4t+3)$ ,

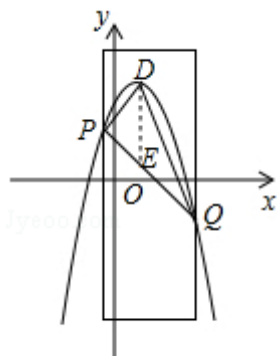
∴ $DE=-x^2+2x+3-[-2(t+1)x+t^2+4t+3]=-x^2+2(t+2)x-t^2-4t$ ,

∴ $S_{\triangle DPQ}=\frac{1}{2}DE \cdot (x_Q - x_P) = -2x^2+4(t+2)x-2t^2-8t = -2[x-(t+2)]^2+8$ .

∵  $-2 < 0$ ,

∴当  $x=t+2$  时,  $\triangle DPQ$  的面积取最大值, 最大值为 8.

∴假设成立, 即直尺在平移过程中,  $\triangle DPQ$  面积有最大值, 面积的最大值为 8.



图②

**【点评】** 本题考查了待定系数法求二次(一次)函数解析式、二次(一次)函数图象上点的坐标特征、三角形的面积以及二次函数的最值, 解题的关键是: (1) 根据点的坐标, 利用待定系数法求出二次函数表达式; (2) (I) 利用三角形的面积公式找出  $S_{\triangle DPQ} = -2x^2+6x+\frac{7}{2}$ ; (II) 利用三角形的面积公式找出  $S_{\triangle DPQ} = -2x^2+4(t+2)x-2t^2-8t$ .

18. 已知抛物线  $y=ax^2+bx+c$  过点 A (0, 2).

(1) 若点  $(-\sqrt{2}, 0)$  也在该抛物线上, 求 a, b 满足的关系式;

(2) 若该抛物线上任意不同两点 M  $(x_1, y_1)$ , N  $(x_2, y_2)$  都满足: 当  $x_1 < x_2 < 0$  时,  $(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) > 0$ ; 当  $0 < x_1 < x_2$  时,  $(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) < 0$ . 以原点 O 为心, OA 为半径的圆与抛物线的另两个交点为 B, C, 且  $\triangle ABC$  有一个内角为  $60^\circ$ .

①求抛物线的解析式；

②若点 P 与点 O 关于点 A 对称，且 O，M，N 三点共线，求证：PA 平分  $\angle MPN$ 。

【分析】(1) 由抛物线经过点 A 可求出  $c=2$ ，再代入  $(-\sqrt{2}, 0)$  即可找出  $2a - \sqrt{2}b + 2 = 0$  ( $a \neq 0$ )；

(2) ①根据二次函数的性质可得出抛物线的对称轴为 y 轴、开口向下，进而可得出  $b=0$ ，由抛物线的对称性可得出  $\triangle ABC$  为等腰三角形，结合其有一个  $60^\circ$  的内角可得出  $\triangle ABC$  为等边三角形，设线段 BC 与 y 轴交于点 D，根据等边三角形的性质可得出点 C 的坐标，再利用待定系数法可求出 a 值，此题得解；

②由①的结论可得出点 M 的坐标为  $(x_1, -x_1^2 + 2)$ 、点 N 的坐标为  $(x_2, -x_2^2 + 2)$ ，由 O、M、N 三点共线可得出  $x_2 = -\frac{2}{x_1}$ ，进而可得出点 N 及点 N' 的坐标，由点 A、M 的坐标利用待定系数法可求出直线 AM 的解析式，利用一次函数图象上点的坐标特征可得出点 N' 在直线 PM 上，进而即可证出 PA 平分  $\angle MPN$ 。

【解答】解：(1)  $\because$  抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  过点 A (0, 2)，

$$\therefore c = 2.$$

又  $\because$  点  $(-\sqrt{2}, 0)$  也在该抛物线上，

$$\therefore a(-\sqrt{2})^2 + b(-\sqrt{2}) + c = 0,$$

$$\therefore 2a - \sqrt{2}b + 2 = 0 \quad (a \neq 0).$$

(2) ①  $\because$  当  $x_1 < x_2 < 0$  时， $(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) > 0$ ，

$$\therefore x_1 - x_2 < 0, \quad y_1 - y_2 < 0,$$

$\therefore$  当  $x < 0$  时，y 随 x 的增大而增大；

同理：当  $x > 0$  时，y 随 x 的增大而减小，

$\therefore$  抛物线的对称轴为 y 轴，开口向下，

$$\therefore b = 0.$$

$\because$  OA 为半径的圆与抛物线的另两个交点为 B、C，

$\therefore \triangle ABC$  为等腰三角形，

又  $\because \triangle ABC$  有一个内角为  $60^\circ$ ，

$\therefore \triangle ABC$  为等边三角形。

设线段 BC 与 y 轴交于点 D，则  $BD = CD$ ，且  $\angle OCD = 30^\circ$ ，

又  $\because OB = OC = OA = 2$ ，

$$\therefore CD=OC \cdot \cos 30^\circ = \sqrt{3}, OD=OC \cdot \sin 30^\circ = 1.$$

不妨设点 C 在 y 轴右侧，则点 C 的坐标为  $(\sqrt{3}, -1)$ .

$\because$  点 C 在抛物线上，且  $c=2$ ,  $b=0$ ,

$$\therefore 3a+2 = -1,$$

$$\therefore a = -1,$$

$\therefore$  抛物线的解析式为  $y = -x^2 + 2$ .

②证明：由①可知，点 M 的坐标为  $(x_1, -x_1^2 + 2)$ ，点 N 的坐标为  $(x_2, -x_2^2 + 2)$ .

直线 OM 的解析式为  $y = k_1 x$  ( $k_1 \neq 0$ ).

$\because$  O、M、N 三点共线，

$$\therefore x_1 \neq 0, x_2 \neq 0, \text{ 且 } \frac{-x_1^2 + 2}{x_1} = \frac{-x_2^2 + 2}{x_2},$$

$$\therefore -x_1 + \frac{2}{x_1} = -x_2 + \frac{2}{x_2},$$

$$\therefore x_1 - x_2 = -\frac{2(x_1 - x_2)}{x_1 x_2},$$

$$\therefore x_1 x_2 = -2, \text{ 即 } x_2 = -\frac{2}{x_1},$$

$$\therefore \text{点 N 的坐标为 } \left(-\frac{2}{x_1}, -\frac{4}{x_1^2} + 2\right).$$

设点 N 关于 y 轴的对称点为点 N'，则点 N' 的坐标为  $\left(\frac{2}{x_1}, -\frac{4}{x_1^2} + 2\right)$ .

$\because$  点 P 是点 O 关于点 A 的对称点，

$$\therefore OP = 2OA = 4,$$

$\therefore$  点 P 的坐标为  $(0, 4)$ .

设直线 PM 的解析式为  $y = k_2 x + 4$ ,

$\because$  点 M 的坐标为  $(x_1, -x_1^2 + 2)$ ,

$$\therefore -x_1^2 + 2 = k_2 x_1 + 4,$$

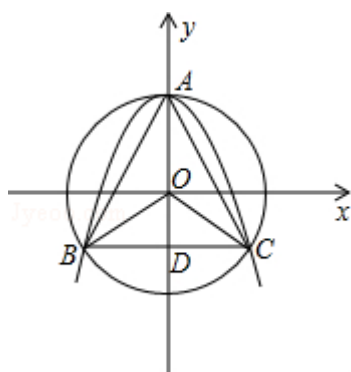
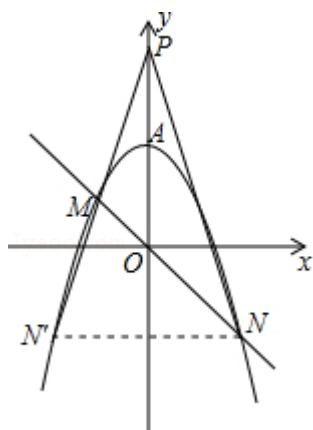
$$\therefore k_2 = -\frac{x_1^2 + 2}{x_1},$$

∴ 直线 PM 的解析式为  $y = -\frac{x_1^2+2}{x_1}x+4$ .

$$\therefore -\frac{x_1^2+2}{x_1} \cdot \frac{2}{x_1} + 4 = \frac{-2(x_1^2+2)+4x_1^2}{x_1^2} = -\frac{4}{x_1^2} + 2,$$

∴ 点 N' 在直线 PM 上,

∴ PA 平分  $\angle MPN$ .



**【点评】** 本题考查了待定系数法求一次（二次）函数解析式、二次函数的性质、等边三角形的性质以及一次（二次）函数图象上点的坐标特征，解题的关键是：

（1）利用二次函数图象上点的坐标特征求出  $a$ 、 $b$  满足的关系式；（2）①利用等边三角形的性质找出点 C 的坐标；②利用一次函数图象上点的坐标特征找出点 N' 在直线 PM 上.

19. 如图，在平面直角坐标系中， $\angle ACB=90^\circ$ ， $OC=2OB$ ， $\tan \angle ABC=2$ ，点 B 的坐标为  $(1, 0)$ . 抛物线  $y = -x^2+bx+c$  经过 A、B 两点.

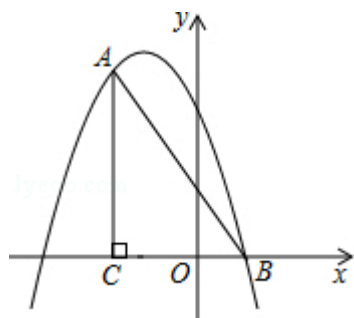
（1）求抛物线的解析式；

（2）点 P 是直线 AB 上方抛物线上的一点，过点 P 作 PD 垂直 x 轴于点 D，交线

段 AB 于点 E，使  $PE = \frac{1}{2}DE$ 。

①求点 P 的坐标；

②在直线 PD 上是否存在点 M，使  $\triangle ABM$  为直角三角形？若存在，求出符合条件的所有点 M 的坐标；若不存在，请说明理由。



**【分析】**（1）先根据已知求点 A 的坐标，利用待定系数法求二次函数的解析式；

（2）①先得 AB 的解析式为：  $y = -2x + 2$ ，根据  $PD \perp x$  轴，设  $P(x, -x^2 - 3x + 4)$ ，则  $E(x, -2x + 2)$ ，根据  $PE = \frac{1}{2}DE$ ，列方程可得 P 的坐标；

②先设点 M 的坐标，根据两点距离公式可得 AB，AM，BM 的长，分三种情况： $\triangle ABM$  为直角三角形时，分别以 A、B、M 为直角顶点时，利用勾股定理列方程可得点 M 的坐标。

**【解答】**解：（1） $\because B(1, 0)$ ，

$$\therefore OB = 1,$$

$$\therefore OC = 2OB = 2,$$

$$\therefore C(-2, 0),$$

Rt $\triangle ABC$  中， $\tan \angle ABC = 2$ ，

$$\therefore \frac{AC}{BC} = 2,$$

$$\therefore \frac{AC}{3} = 2,$$

$$\therefore AC = 6,$$

$$\therefore A(-2, 6),$$

把  $A(-2, 6)$  和  $B(1, 0)$  代入  $y = -x^2 + bx + c$  得：
$$\begin{cases} -4 - 2b + c = 6 \\ -1 + b + c = 0 \end{cases},$$

$$\text{解得：} \begin{cases} b = -3 \\ c = 4 \end{cases},$$

$\therefore$  抛物线的解析式为： $y = -x^2 - 3x + 4$ ；

(2) ①  $\because A(-2, 6), B(1, 0)$ ,

易得 AB 的解析式为:  $y = -2x + 2$ ,

设  $P(x, -x^2 - 3x + 4)$ , 则  $E(x, -2x + 2)$ ,

$$\because PE = \frac{1}{2}DE,$$

$$\therefore -x^2 - 3x + 4 - (-2x + 2) = \frac{1}{2}(-2x + 2),$$

$$x = 1 \text{ (舍)} \text{ 或 } -1,$$

$$\therefore P(-1, 6);$$

②  $\because M$  在直线 PD 上, 且  $P(-1, 6)$ ,

设  $M(-1, y)$ ,

$$\therefore AM^2 = (-1 + 2)^2 + (y - 6)^2 = 1 + (y - 6)^2,$$

$$BM^2 = (1 + 1)^2 + y^2 = 4 + y^2,$$

$$AB^2 = (1 + 2)^2 + 6^2 = 45,$$

分三种情况:

i) 当  $\angle AMB = 90^\circ$  时, 有  $AM^2 + BM^2 = AB^2$ ,

$$\therefore 1 + (y - 6)^2 + 4 + y^2 = 45,$$

$$\text{解得: } y = 3 \pm \sqrt{11},$$

$$\therefore M(-1, 3 + \sqrt{11}) \text{ 或 } (-1, 3 - \sqrt{11});$$

ii) 当  $\angle ABM = 90^\circ$  时, 有  $AB^2 + BM^2 = AM^2$ ,

$$\therefore 45 + 4 + y^2 = 1 + (y - 6)^2,$$

$$y = -1,$$

$$\therefore M(-1, -1),$$

iii) 当  $\angle BAM = 90^\circ$  时, 有  $AM^2 + AB^2 = BM^2$ ,

$$\therefore 1 + (y - 6)^2 + 45 = 4 + y^2,$$

$$y = \frac{13}{2},$$

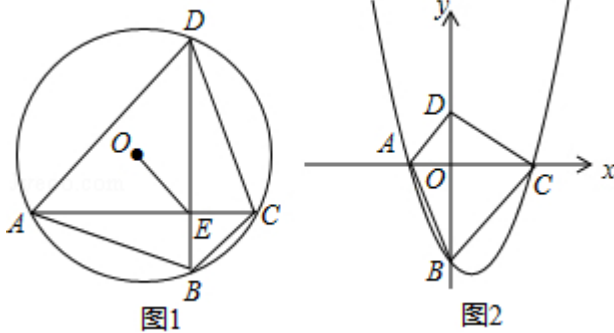
$$\therefore M(-1, \frac{13}{2});$$

综上所述, 点 M 的坐标为:  $\therefore M(-1, 3 + \sqrt{11})$  或  $(-1, 3 - \sqrt{11})$  或  $(-1, -1)$  或  $(-1, \frac{13}{2})$ .

**【点评】**此题是二次函数的综合题, 考查了待定系数法求二次函数的解析式, 铅

直高度和勾股定理的运用，直角三角形的判定等知识．此题难度适中，解题的关键是注意方程思想与分类讨论思想的应用．

20. 我们不妨约定：对角线互相垂直的凸四边形叫做“十字形”．



(1) ①在“平行四边形，矩形，菱形，正方形”中，一定是“十字形”的有 菱形，正方形；

②在凸四边形  $ABCD$  中， $AB=AD$  且  $CB \neq CD$ ，则该四边形 不是 “十字形”．(填“是”或“不是”)

(2) 如图 1， $A, B, C, D$  是半径为 1 的  $\odot O$  上按逆时针方向排列的四个动点， $AC$  与  $BD$  交于点  $E$ ， $\angle ADB - \angle CDB = \angle ABD - \angle CBD$ ，当  $6 \leq AC^2 + BD^2 \leq 7$  时，求  $OE$  的取值范围；

(3) 如图 2，在平面直角坐标系  $xOy$  中，抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a, b, c$  为常数， $a > 0, c < 0$ ) 与  $x$  轴交于  $A, C$  两点 (点  $A$  在点  $C$  的左侧)， $B$  是抛物线与  $y$  轴的交点，点  $D$  的坐标为  $(0, -ac)$ ，记“十字形” $ABCD$  的面积为  $S$ ，记  $\triangle AOB, \triangle COD, \triangle AOD, \triangle BOC$  的面积分别为  $S_1, S_2, S_3, S_4$ ．求同时满足下列三个条件的抛物线的解析式；

①  $\sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}$ ； ②  $\sqrt{S} = \sqrt{S_3} + \sqrt{S_4}$ ； ③ “十字形” $ABCD$  的周长为  $12\sqrt{10}$ ．

【分析】(1) 利用“十字形”的定义判断即可；

(2) 先判断出  $\angle ADB + \angle CAD = \angle ABD + \angle CAB$ ，进而判断出  $\angle AED = \angle AEB = 90^\circ$ ，即： $AC \perp BD$ ，再判断出四边形  $OMEN$  是矩形，进而得出  $OE^2 = 2 - \frac{1}{4}(AC^2 + BD^2)$ ，即可得出结论；

(3) 由题意得， $A(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, 0)$ ， $B(0, c)$ ， $C(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}, 0)$ ， $D(0, -ac)$ ，

求出  $S = \frac{1}{2}AC \cdot BD = -\frac{1}{2}(ac+c) \times \frac{\sqrt{\Delta}}{a}$ ,  $S_1 = \frac{1}{2}OA \cdot OB = -\frac{c(\sqrt{\Delta}+b)}{4a}$ ,  $S_2 = \frac{1}{2}OC \cdot OD = -\frac{c(\sqrt{\Delta}-b)}{4a}$ ,  $S_3 = \frac{1}{2}OA \times OD = -\frac{c(\sqrt{\Delta}+b)}{4a}$ ,  $S_4 = \frac{1}{2}OB \times OC = -\frac{c(\sqrt{\Delta}-b)}{4a}$ , 进而建立方程  $\frac{\sqrt{-c(\sqrt{\Delta}+b)}}{\sqrt{4a}} + \frac{\sqrt{-c(\sqrt{\Delta}-b)}}{2} = \frac{\sqrt{-c(\sqrt{\Delta}+b)}}{2} + \frac{\sqrt{-c(\sqrt{\Delta}-b)}}{\sqrt{4a}}$ , 求出  $a=1$ , 再求出  $b=0$ , 进而判断出四边形 ABCD 是菱形, 求出  $AD=3\sqrt{10}$ , 进而求出  $c=-9$ , 即可得出结论.

【解答】解: (1) ①  $\because$  菱形, 正方形的对角线互相垂直,

$\therefore$  菱形, 正方形是: “十字形”,

$\because$  平行四边形, 矩形的对角线不一定垂直,

$\therefore$  平行四边形, 矩形不是“十字形”,

故答案为: 菱形, 正方形;

②如图,

当  $CB=CD$  时, 在  $\triangle ABC$  和  $\triangle ADC$  中,  $\begin{cases} AB=AD \\ CB=CD, \\ AC=AC \end{cases}$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle ADC$  (SSS),

$\therefore \angle BAC = \angle DAC$ ,

$\because AB=AD$ ,

$\therefore AC \perp BD$ ,

$\therefore$  当  $CB \neq CD$  时, 四边形 ABCD 不是“十字形”,

故答案为: 不是;

(2)  $\because \angle ADB + \angle CBD = \angle ABD + \angle CDB$ ,  $\angle CBD = \angle CDB = \angle CAB$ ,

$\therefore \angle ADB + \angle CAD = \angle ABD + \angle CAB$ ,

$\therefore 180^\circ - \angle AED = 180^\circ - \angle AEB$ ,

$\therefore \angle AED = \angle AEB = 90^\circ$ ,

$\therefore AC \perp BD$ ,

过点 O 作  $OM \perp AC$  于 M,  $ON \perp BD$  于 N, 连接 OA, OD,

$\therefore OA=OD=1$ ,  $OM^2=OA^2-AM^2$ ,  $ON^2=OD^2-DN^2$ ,  $AM=\frac{1}{2}AC$ ,  $DN=\frac{1}{2}BD$ , 四边形 OMEN

是矩形,



$$\therefore ON=ME, OE^2=OM^2+ME^2,$$

$$\therefore OE^2=OM^2+ON^2=2-\frac{1}{4}(AC^2+BD^2),$$

$$\because 6 \leq AC^2+BD^2 \leq 7,$$

$$\therefore 2-\frac{7}{4} \leq OE^2 \leq 2-\frac{3}{2},$$

$$\therefore \frac{1}{4} \leq OE^2 \leq \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{1}{2} \leq OE \leq \frac{\sqrt{2}}{2} (OE > 0);$$

$$(3) \text{ 由题意得, } A\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, 0\right), B(0, c), C\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}, 0\right), D(0, -ac),$$

$$\because a > 0, c < 0,$$

$$\therefore OA=\frac{\sqrt{\Delta}+b}{2a}, OB=-c, OC=\frac{\sqrt{\Delta}-b}{2a}, OD=-ac, AC=\frac{\sqrt{\Delta}}{a}, BD=-ac-c,$$

$$\therefore S=\frac{1}{2}AC \cdot BD=-\frac{1}{2}(ac+c) \times \frac{\sqrt{\Delta}}{a}, S_1=\frac{1}{2}OA \cdot OB=-\frac{c(\sqrt{\Delta}+b)}{4a}, S_2=\frac{1}{2}OC \cdot OD=-\frac{c(\sqrt{\Delta}-b)}{4},$$

$$S_3=\frac{1}{2}OA \times OD=-\frac{c(\sqrt{\Delta}+b)}{4}, S_4=\frac{1}{2}OB \times OC=-\frac{c(\sqrt{\Delta}-b)}{4a},$$

$$\because \sqrt{S}=\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}, \sqrt{S}=\sqrt{S_3}+\sqrt{S_4},$$

$$\therefore \frac{\sqrt{-c(\sqrt{\Delta}+b)}}{\sqrt{4a}}+\frac{\sqrt{-c(\sqrt{\Delta}-b)}}{2}=\frac{\sqrt{-c(\sqrt{\Delta}+b)}}{2}+\frac{\sqrt{-c(\sqrt{\Delta}-b)}}{\sqrt{4a}},$$

$$\therefore \sqrt{4a}=2,$$

$$\therefore a=1,$$

$$\therefore S=-c\sqrt{\Delta}, S_1=-\frac{c(\sqrt{\Delta}+b)}{4}, S_4=-\frac{c(\sqrt{\Delta}-b)}{4},$$

$$\because \sqrt{S}=\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2},$$

$$\therefore S=S_1+S_2+2\sqrt{S_1S_2},$$

$$\therefore -c\sqrt{\Delta}=-\frac{c\sqrt{\Delta}}{2}+2\sqrt{\frac{c^2 \cdot (-4c)}{16}},$$

$$\therefore -\frac{c\sqrt{\Delta}}{2}=-c \cdot \sqrt{-c},$$

$$\therefore \sqrt{b^2-4c}=\sqrt{-4c},$$

$$\therefore b=0,$$

$$\therefore A(-\sqrt{c}, 0), B(0, c), C(\sqrt{-c}, 0), D(0, -c),$$

$\therefore$  四边形 ABCD 是菱形,

$$\therefore 4AD=12\sqrt{10},$$

$$\therefore AD=3\sqrt{10},$$

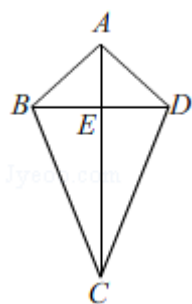
$$\text{即: } AD^2=90,$$

$$\therefore AD^2=c^2 - c,$$

$$\therefore c^2 - c=90,$$

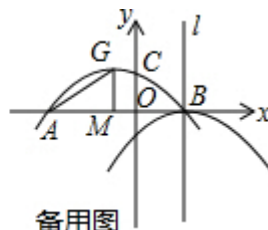
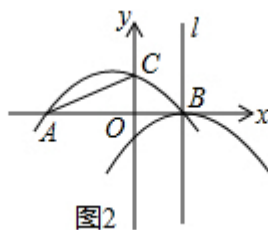
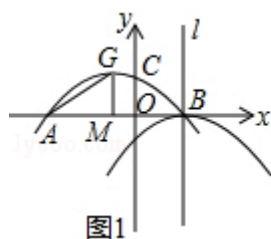
$$\therefore c=-9 \text{ 或 } c=10 \text{ (舍)},$$

$$\text{即: } y=x^2 - 9.$$



【点评】此题是二次函数综合题，主要考查了新定义，平行四边形，矩形，菱形，正方形的性质，全等三角形的判定和性质，三角形的面积公式，求出  $a=1$  是解本题的关键．

21. 如图 1，抛物线  $y_1=ax^2 - \frac{1}{2}x+c$  与  $x$  轴交于点 A 和点 B (1, 0)，与  $y$  轴交于点 C (0,  $\frac{3}{4}$ )，抛物线  $y_1$  的顶点为 G， $GM \perp x$  轴于点 M. 将抛物线  $y_1$  平移后得到顶点为 B 且对称轴为直线  $l$  的抛物线  $y_2$ .



(1) 求抛物线  $y_2$  的解析式;

(2) 如图 2，在直线  $l$  上是否存在点 T，使  $\triangle TAC$  是等腰三角形？若存在，请求

出所有点 T 的坐标；若不存在，请说明理由；

(3) 点 P 为抛物线  $y_1$  上一动点，过点 P 作 y 轴的平行线交抛物线  $y_2$  于点 Q，点 Q 关于直线 l 的对称点为 R，若以 P, Q, R 为顶点的三角形与  $\triangle AMG$  全等，求直线 PR 的解析式.

【分析】(1) 应用待定系数法求解析式；

(2) 设出点 T 坐标，表示  $\triangle TAC$  三边，进行分类讨论；

(3) 设出点 P 坐标，表示 Q、R 坐标及 PQ、QR，根据以 P, Q, R 为顶点的三角形与  $\triangle AMG$  全等，分类讨论对应边相等的可能性即可.

【解答】解：(1) 由已知， $c=\frac{3}{4}$ ,

将 B (1, 0) 代入，得： $a - \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = 0$ ,

解得  $a = -\frac{1}{4}$ ,

抛物线解析式为  $y_1 = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$ ,

$\because$  抛物线  $y_1$  平移后得到  $y_2$ ，且顶点为 B (1, 0)，

$\therefore y_2 = -\frac{1}{4}(x-1)^2$ ,

即  $y_2 = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ .

(2) 存在，

如图 1:

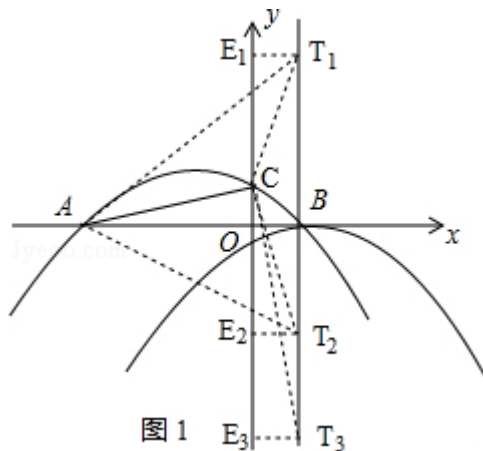


图 1

抛物线  $y_2$  的对称轴 l 为  $x=1$ ，设 T (1, t)，

已知 A (-3, 0)，C (0,  $\frac{3}{4}$ ),

过点 T 作  $TE \perp y$  轴于 E, 则

$$TC^2 = TE^2 + CE^2 = 1^2 + \left(\frac{3}{4} - t\right)^2 = t^2 - \frac{3}{2}t + \frac{25}{16},$$

$$TA^2 = TB^2 + AB^2 = (1+3)^2 + t^2 = t^2 + 16,$$

$$AC^2 = \frac{153}{16},$$

$$\text{当 } TC=AC \text{ 时, } t^2 - \frac{3}{2}t + \frac{25}{16} = \frac{153}{16}$$

$$\text{解得: } t_1 = \frac{3+\sqrt{137}}{4}, t_2 = \frac{3-\sqrt{137}}{4};$$

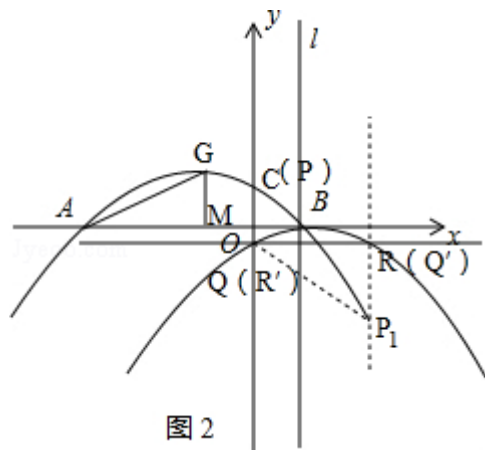
$$\text{当 } TA=AC \text{ 时, } t^2 + 16 = \frac{153}{16}, \text{ 无解;}$$

$$\text{当 } TA=TC \text{ 时, } t^2 - \frac{3}{2}t + \frac{25}{16} = t^2 + 16,$$

$$\text{解得 } t_3 = -\frac{77}{8};$$

当点 T 坐标分别为  $(1, \frac{3+\sqrt{137}}{4})$ ,  $(1, \frac{3-\sqrt{137}}{4})$ ,  $(1, -\frac{77}{8})$  时,  $\triangle TAC$  为等腰三角形.

(3) 如图 2:



$$\text{设 } P(m, -\frac{1}{4}m^2 - \frac{1}{2}m + \frac{3}{4}), \text{ 则 } Q(m, -\frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{2}m - \frac{1}{4})$$

$\because Q, R$  关于  $x=1$  对称

$$\therefore R(2-m, -\frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{2}m - \frac{1}{4}),$$

①当点 P 在直线 l 左侧时,

$$PQ=1-m, QR=2-2m,$$

$\because \triangle PQR$  与  $\triangle AMG$  全等,

∴当  $PQ=GM$  且  $QR=AM$  时,  $m=0$ ,

∴ $P(0, \frac{3}{4})$ , 即点  $P$ 、 $C$  重合.

∴ $R(2, -\frac{1}{4})$ ,

由此求直线  $PR$  解析式为  $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$ ,

当  $PQ=AM$  且  $QR=GM$  时, 无解;

②当点  $P$  在直线  $l$  右侧时,

同理:  $PQ=m-1$ ,  $QR=2m-2$ ,

则  $P(2, -\frac{5}{4})$ ,  $R(0, -\frac{1}{4})$ ,

$PQ$  解析式为:  $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ ;

∴ $PR$  解析式为:  $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$  或  $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$

**【点评】** 本题是代数几何综合题, 考查了二次函数性质、三角形全等和等腰三角形判定, 应用了数形结合和分类讨论的数学思想.

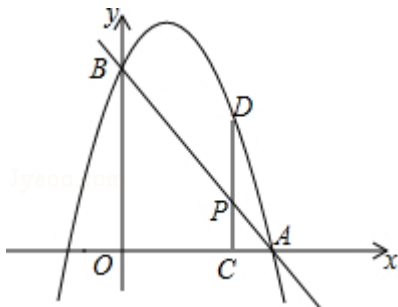
22. 如图, 已知直线  $y = -2x+4$  分别交  $x$  轴、 $y$  轴于点  $A$ 、 $B$ , 抛物线过  $A$ 、 $B$  两点, 点  $P$  是线段  $AB$  上一动点, 过点  $P$  作  $PC \perp x$  轴于点  $C$ , 交抛物线于点  $D$ .

(1) 若抛物线的解析式为  $y = -2x^2+2x+4$ , 设其顶点为  $M$ , 其对称轴交  $AB$  于点  $N$ .

①求点  $M$ 、 $N$  的坐标;

②是否存在点  $P$ , 使四边形  $MNPD$  为菱形? 并说明理由;

(2) 当点  $P$  的横坐标为 1 时, 是否存在这样的抛物线, 使得以  $B$ 、 $P$ 、 $D$  为顶点的三角形与  $\triangle AOB$  相似? 若存在, 求出满足条件的抛物线的解析式; 若不存在, 请说明理由.



**【分析】** (1) ①如图 1, 把抛物线解析式配成顶点式可得到顶点为  $M$  的坐标为

$(\frac{1}{2}, \frac{9}{2})$ ，然后计算自变量为 $\frac{1}{2}$ 对应的一次函数值可得到 N 点坐标；

②易得  $MN=\frac{3}{2}$ ，设 P 点坐标为  $(m, -2m+4)$ ，则 D  $(m, -2m^2+2m+4)$ ，则  $PD=-2m^2+4m$ ，由于  $PD \parallel MN$ ，根据平行四边形的判定方法，当  $PD=MN$  时，四边形 MNP D 为平行四边形，即  $-2m^2+4m=\frac{3}{2}$ ，求出 m 得到此时 P 点坐标为  $(\frac{3}{2}, 1)$ ，接着计算出 PN，然后比较 PN 与 MN 的大小关系可判断平行四边形 MNP D 是否为菱形；

(2) 如图 2，利用勾股定理计算出  $AB=2\sqrt{5}$ ，再表示出 P  $(1, 2)$ ，则可计算出  $PB=\sqrt{5}$ ，接着表示出抛物线解析式为  $y=ax^2-2(a+1)x+4$ ，则可用 a 表示出点 D 坐标为  $(1, 2-a)$ ，所以  $PD=-a$ ，由于  $\angle DPB=\angle OBA$ ，根据相似三角形的判定方法，当  $\frac{PD}{BO}=\frac{PB}{BA}$  时， $\triangle PDB \sim \triangle BOA$ ，即  $\frac{-a}{4}=\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$ ；当  $\frac{PD}{BA}=\frac{PB}{BO}$  时， $\triangle PDB \sim \triangle BAO$ ，即  $\frac{-a}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{4}$ ，然后利用比例性质分别求出 a 的值，从而得到对应的抛物线的解析式。

【解答】解：(1) ①如图 1，

$$\because y = -2x^2 + 2x + 4 = -2(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{9}{2},$$

$$\therefore \text{顶点为 M 的坐标为 } (\frac{1}{2}, \frac{9}{2}),$$

$$\text{当 } x=\frac{1}{2} \text{ 时, } y = -2 \times \frac{1}{2} + 4 = 3, \text{ 则点 N 坐标为 } (\frac{1}{2}, 3);$$

②不存在。

理由如下：

$$MN = \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2},$$

设 P 点坐标为  $(m, -2m+4)$ ，则 D  $(m, -2m^2+2m+4)$ ，

$$\therefore PD = -2m^2 + 2m + 4 - (-2m + 4) = -2m^2 + 4m,$$

$$\because PD \parallel MN,$$

当  $PD=MN$  时，四边形 MNP D 为平行四边形，即  $-2m^2+4m=\frac{3}{2}$ ，解得  $m_1=\frac{1}{2}$  (舍

去)， $m_2=\frac{3}{2}$ ，此时 P 点坐标为  $(\frac{3}{2}, 1)$ ，

$$\because PN = \sqrt{(\frac{1}{2} - \frac{3}{2})^2 + (3 - 1)^2} = \sqrt{5},$$

∴ PN ≠ MN,

∴ 平行四边形 MNPD 不为菱形,

∴ 不存在点 P, 使四边形 MNPD 为菱形;

(2) 存在.

如图 2, OB=4, OA=2, 则  $AB = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$ ,

当 x=1 时,  $y = -2x + 4 = 2$ , 则 P (1, 2),

∴  $PB = \sqrt{1^2 + (2-4)^2} = \sqrt{5}$ ,

设抛物线的解析式为  $y = ax^2 + bx + 4$ ,

把 A (2, 0) 代入得  $4a + 2b + 4 = 0$ , 解得  $b = -2a - 2$ ,

∴ 抛物线的解析式为  $y = ax^2 - 2(a+1)x + 4$ ,

当 x=1 时,  $y = ax^2 - 2(a+1)x + 4 = a - 2a - 2 + 4 = 2 - a$ , 则 D (1, 2 - a),

∴  $PD = 2 - a - 2 = -a$ ,

∵ DC // OB,

∴  $\angle DPB = \angle OBA$ ,

∴ 当  $\frac{PD}{BO} = \frac{PB}{BA}$  时,  $\triangle PDB \sim \triangle BOA$ , 即  $\frac{-a}{4} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$ , 解得  $a = -2$ , 此时抛物线解析式

为  $y = -2x^2 + 2x + 4$ ;

当  $\frac{PD}{BA} = \frac{PB}{BO}$  时,  $\triangle PDB \sim \triangle BAO$ , 即  $\frac{-a}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{4}$ , 解得  $a = -\frac{5}{2}$ , 此时抛物线解析式为

$y = -\frac{5}{2}x^2 + 3x + 4$ ;

综上所述, 满足条件的抛物线的解析式为  $y = -2x^2 + 2x + 4$  或  $y = -\frac{5}{2}x^2 + 3x + 4$ .

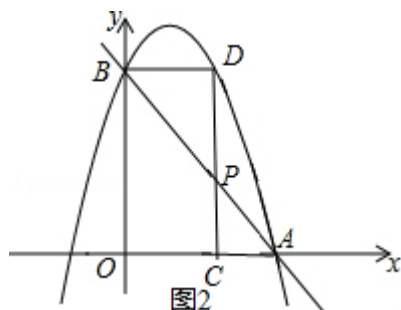
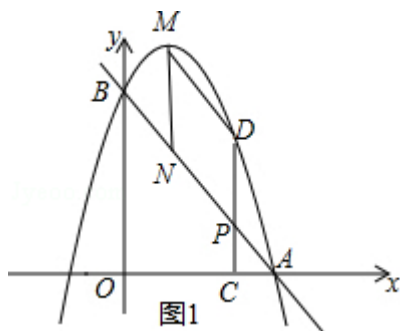


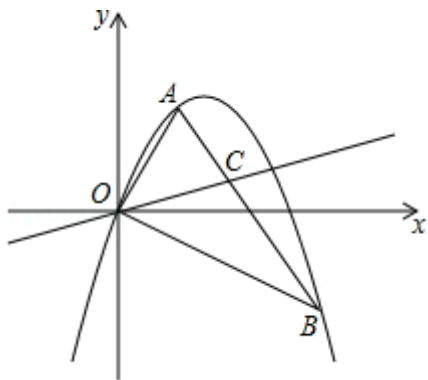
图2



**【点评】**本题考查了二次函数的综合题：熟练掌握二次函数图象上点的坐标特征、二次函数的性质和菱形的判定；会利用待定系数法求函数解析式；理解坐标与图形性质；灵活运用相似比表示线段之间的关系；会运用分类讨论的思想解决数学问题.

23. 如图，抛物线  $y=ax^2+bx$  经过  $\triangle OAB$  的三个顶点，其中点  $A(1, \sqrt{3})$ ，点  $B(3, -\sqrt{3})$ ， $O$  为坐标原点.

- (1) 求这条抛物线所对应的函数表达式；
- (2) 若  $P(4, m)$ ， $Q(t, n)$  为该抛物线上的两点，且  $n < m$ ，求  $t$  的取值范围；
- (3) 若  $C$  为线段  $AB$  上的一个动点，当点  $A$ ，点  $B$  到直线  $OC$  的距离之和最大时，求  $\angle BOC$  的大小及点  $C$  的坐标.



- 【分析】**
- (1) 将已知点坐标代入即可；
  - (2) 利用抛物线增减性可解问题；
  - (3) 观察图形，点  $A$ ，点  $B$  到直线  $OC$  的距离之和小于等于  $AB$ ；同时用点  $A(1, \sqrt{3})$ ，点  $B(3, -\sqrt{3})$  求出相关角度.

**【解答】**解：(1) 把点  $A(1, \sqrt{3})$ ，点  $B(3, -\sqrt{3})$  分别代入  $y=ax^2+bx$  得

$$\begin{cases} \sqrt{3}=a+b \\ -\sqrt{3}=9a+3b \end{cases}$$



$$\text{解得} \begin{cases} a = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \\ b = \frac{5\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$\therefore y = -\frac{2\sqrt{3}}{3}x^2 + \frac{5\sqrt{3}}{3}x$$

(2) 由 (1) 得

$$m = -\frac{32\sqrt{3}}{3} + \frac{20\sqrt{3}}{3} = -4\sqrt{3}$$

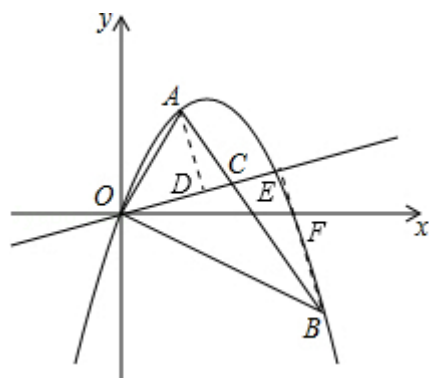
$$n = -\frac{2\sqrt{3}}{3}t^2 + \frac{5\sqrt{3}}{3}t$$

$$m - n = -4\sqrt{3} - \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}t^2 + \frac{5\sqrt{3}}{3}t\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}(2t+3)(t-4)$$

当  $n < m$  时, 由图象可知,  $t > 4$  或  $t < -\frac{3}{2}$

(3) 如图, 设抛物线交  $x$  轴于点  $F$

分别过点  $A$ 、 $B$  作  $AD \perp OC$  于点  $D$ ,  $BE \perp OC$  于点  $E$



$$\because AC \geq AD, BC \geq BE$$

$$\therefore AD + BE \leq AC + BC = AB$$

$\therefore$  当  $OC \perp AB$  时, 点  $A$ , 点  $B$  到直线  $OC$  的距离之和最大.

$$\because A(1, \sqrt{3}), \text{点 } B(3, -\sqrt{3})$$

$$\therefore \angle AOF = 60^\circ, \angle BOF = 30^\circ$$

$$\therefore \angle AOB = 90^\circ$$

$$\therefore \angle ABO = 30^\circ$$

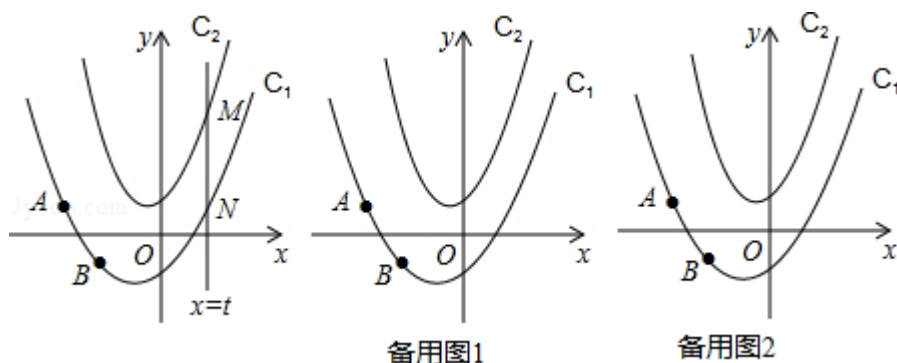
当  $OC \perp AB$  时,  $\angle BOC = 60^\circ$

点  $C$  坐标为  $(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ .

**【点评】** 本题考查综合考查用待定系数法求二次函数解析式, 抛物线的增减性. 解答问题时注意线段最值问题的转化方法.

24. 如图，在平面直角坐标系中，抛物线  $C_1: y=ax^2+bx-1$  经过点  $A(-2, 1)$  和点  $B(-1, -1)$ ，抛物线  $C_2: y=2x^2+x+1$ ，动直线  $x=t$  与抛物线  $C_1$  交于点  $N$ ，与抛物线  $C_2$  交于点  $M$ 。

- (1) 求抛物线  $C_1$  的表达式；
- (2) 直接用含  $t$  的代数式表示线段  $MN$  的长；
- (3) 当  $\triangle AMN$  是以  $MN$  为直角边的等腰直角三角形时，求  $t$  的值；
- (4) 在 (3) 的条件下，设抛物线  $C_1$  与  $y$  轴交于点  $P$ ，点  $M$  在  $y$  轴右侧的抛物线  $C_2$  上，连接  $AM$  交  $y$  轴于点  $K$ ，连接  $KN$ ，在平面内有一点  $Q$ ，连接  $KQ$  和  $QN$ ，当  $KQ=1$  且  $\angle KNQ=\angle BNP$  时，请直接写出点  $Q$  的坐标。



**【分析】** (1) 应用待定系数法；

(2) 把  $x=t$  代入函数关系式相减；

(3) 根据图形分别讨论  $\angle ANM=90^\circ$ 、 $\angle AMN=90^\circ$  时的情况。

(4) 根据题意画出满足条件图形，可以找到  $AN$  为  $\triangle KNP$  对称轴，由对称性找到第一个满足条件  $Q$ ，再通过延长和圆的对称性找到剩余三个点。利用勾股定理进行计算。

**【解答】** 解：(1)  $\because$  抛物线  $C_1: y=ax^2+bx-1$  经过点  $A(-2, 1)$  和点  $B(-1, -1)$

$$\therefore \begin{cases} 1=4a-2b-1 \\ -1=a-b-1 \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$$

$\therefore$  抛物线  $C_1$  解析式为  $y=x^2+x-1$

(2)  $\because$  动直线  $x=t$  与抛物线  $C_1$  交于点  $N$ ，与抛物线  $C_2$  交于点  $M$

$\therefore$  点  $N$  的纵坐标为  $t^2+t-1$ ，点  $M$  的纵坐标为  $2t^2+t+1$

$$\therefore MN = (2t^2 + t + 1) - (t^2 + t - 1) = t^2 + 2$$

(3) 共分两种情况

①当  $\angle ANM = 90^\circ$ ,  $AN = MN$  时, 由已知  $N(t, t^2 + t - 1)$ ,  $A(-2, 1)$

$$\therefore AN = t - (-2) = t + 2$$

$$\because MN = t^2 + 2$$

$$\therefore t^2 + 2 = t + 2$$

$$\therefore t_1 = 0 \text{ (舍去)}, t_2 = 1$$

$$\therefore t = 1$$

②当  $\angle AMN = 90^\circ$ ,  $AN = MN$  时, 由已知  $M(t, 2t^2 + t + 1)$ ,  $A(-2, 1)$

$$\therefore AM = t - (-2) = t + 2,$$

$$\because MN = t^2 + 2$$

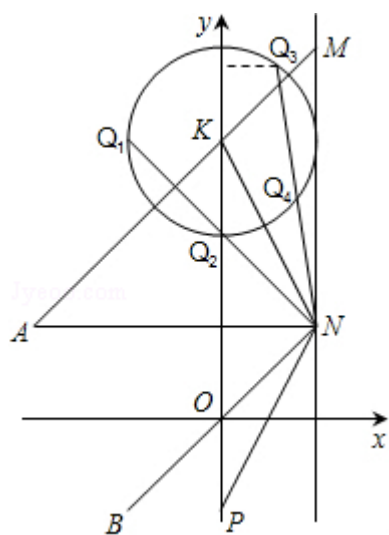
$$\therefore t^2 + 2 = t + 2$$

$$\therefore t_1 = 0, t_2 = 1 \text{ (舍去)}$$

$$\therefore t = 0$$

故  $t$  的值为 1 或 0

(4) 由 (3) 可知  $t=1$  时  $M$  位于  $y$  轴右侧, 根据题意画出示意图如图:



易得  $K(0, 3)$ ,  $B$ 、 $O$ 、 $N$  三点共线

$$\because A(-2, 1) \quad N(1, 1) \quad P(0, -1)$$

$\therefore$  点  $K$ 、 $P$  关于直线  $AN$  对称

设  $\odot K$  与  $y$  轴下方交点为  $Q_2$ , 则其坐标为  $(0, 2)$

$\therefore Q_2$  与点  $P$  关于直线  $AN$  对称

$\therefore Q_2$  是满足条件  $\angle KNQ = \angle BNP$ .

则  $NQ_2$  延长线与  $\odot K$  交点  $Q_1$ ,  $Q_1$ 、 $Q_2$  关于  $KN$  的对称点  $Q_3$ 、 $Q_4$  也满足  $\angle KNQ = \angle BNP$ .

由图形易得  $Q_1(-1, 3)$

设点  $Q_3$  坐标为  $(a, b)$ , 由对称性可知  $Q_3N = NQ_1 = BN = 2\sqrt{2}$

由  $\because \odot K$  半径为 1

$$\therefore \begin{cases} (a-1)^2 + (b-1)^2 = (2\sqrt{2})^2 \\ a^2 + (b-3)^2 = 1^2 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = \frac{3}{5} \\ b = \frac{19}{5} \end{cases}, \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \end{cases}$$

同理, 设点  $Q_4$  坐标为  $(a, b)$ , 由对称性可知  $Q_4N = NQ_2 = NO = \sqrt{2}$

$$\therefore \begin{cases} (a-1)^2 + (b-1)^2 = (\sqrt{2})^2 \\ a^2 + (b-3)^2 = 1^2 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} a = \frac{4}{5} \\ b = \frac{12}{5} \end{cases}, \begin{cases} a = 0 \\ b = 2 \end{cases}$$

$\therefore$  满足条件的  $Q$  点坐标为:  $(0, 2)$ 、 $(-1, 3)$ 、 $(\frac{3}{5}, \frac{19}{5})$ 、 $(\frac{4}{5}, \frac{12}{5})$

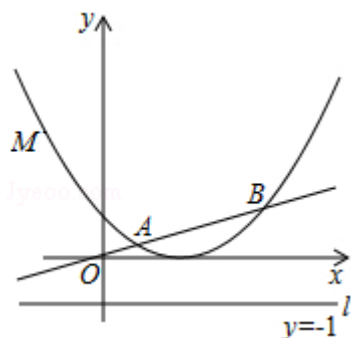
**【点评】** 本题为代数几何综合题, 考查了二次函数基本性质. 解答过程中应用了分类讨论、数形结合以及构造数学模型等数学思想.

25. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 已知抛物线的顶点坐标为  $(2, 0)$ , 且经过点  $(4, 1)$ , 如图, 直线  $y = \frac{1}{4}x$  与抛物线交于  $A$ 、 $B$  两点, 直线  $l$  为  $y = -1$ .

(1) 求抛物线的解析式;

(2) 在  $l$  上是否存在一点  $P$ , 使  $PA + PB$  取得最小值? 若存在, 求出点  $P$  的坐标; 若不存在, 请说明理由.

(3) 知  $F(x_0, y_0)$  为平面内一定点,  $M(m, n)$  为抛物线上一动点, 且点  $M$  到直线  $l$  的距离与点  $M$  到点  $F$  的距离总是相等, 求定点  $F$  的坐标.



【分析】(1) 由抛物线的顶点坐标为  $(2, 0)$ ，可设抛物线的解析式为  $y=a(x-2)^2$ ，由抛物线过点  $(4, 1)$ ，利用待定系数法即可求出抛物线的解析式；

(2) 联立直线  $AB$  与抛物线解析式成方程组，通过解方程组可求出点  $A$ 、 $B$  的坐标，作点  $B$  关于直线  $l$  的对称点  $B'$ ，连接  $AB'$  交直线  $l$  于点  $P$ ，此时  $PA+PB$  取得最小值，根据点  $B$  的坐标可得出点  $B'$  的坐标，根据点  $A$ 、 $B'$  的坐标利用待定系数法可求出直线  $AB'$  的解析式，再利用一次函数图象上点的坐标特征即可求出点  $P$  的坐标；

(3) 由点  $M$  到直线  $l$  的距离与点  $M$  到点  $F$  的距离总是相等结合二次函数图象上点的坐标特征，即可得出  $(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}y_0)m^2 + (2 - 2x_0 + 2y_0)m + x_0^2 + y_0^2 - 2y_0 - 3 = 0$ ，由  $m$  的任意性可得出关于  $x_0$ 、 $y_0$  的方程组，解之即可求出顶点  $F$  的坐标。

【解答】解：(1)  $\because$  抛物线的顶点坐标为  $(2, 0)$ ，  
设抛物线的解析式为  $y=a(x-2)^2$ 。

$\because$  该抛物线经过点  $(4, 1)$ ，

$$\therefore 1=4a, \text{ 解得: } a=\frac{1}{4},$$

$$\therefore \text{抛物线的解析式为 } y=\frac{1}{4}(x-2)^2=\frac{1}{4}x^2-x+1.$$

(2) 联立直线  $AB$  与抛物线解析式成方程组，得：

$$\begin{cases} y=\frac{1}{4}x \\ y=\frac{1}{4}x^2-x+1 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} x_1=1 \\ y_1=\frac{1}{4} \end{cases}, \begin{cases} x_2=4 \\ y_2=1 \end{cases},$$

$\therefore$  点  $A$  的坐标为  $(1, \frac{1}{4})$ ，点  $B$  的坐标为  $(4, 1)$ 。

作点  $B$  关于直线  $l$  的对称点  $B'$ ，连接  $AB'$  交直线  $l$  于点  $P$ ，此时  $PA+PB$  取得最小值（如图 1 所示）。

∵ 点 B (4, 1), 直线 l 为  $y = -1$ ,

∴ 点 B' 的坐标为 (4, -3).

设直线 AB' 的解析式为  $y = kx + b$  ( $k \neq 0$ ),

将 A (1,  $\frac{1}{4}$ )、B' (4, -3) 代入  $y = kx + b$ , 得:

$$\begin{cases} k+b=\frac{1}{4} \\ 4k+b=-3 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} k=-\frac{13}{12} \\ b=\frac{4}{3} \end{cases},$$

∴ 直线 AB' 的解析式为  $y = -\frac{13}{12}x + \frac{4}{3}$ ,

当  $y = -1$  时, 有  $-\frac{13}{12}x + \frac{4}{3} = -1$ ,

解得:  $x = \frac{28}{13}$ ,

∴ 点 P 的坐标为 ( $\frac{28}{13}$ , -1).

(3) ∵ 点 M 到直线 l 的距离与点 M 到点 F 的距离总是相等,

$$\therefore (m - x_0)^2 + (n - y_0)^2 = (n+1)^2,$$

$$\therefore m^2 - 2x_0m + x_0^2 - 2y_0n + y_0^2 = 2n + 1.$$

∵ M (m, n) 为抛物线上一动点,

$$\therefore n = \frac{1}{4}m^2 - m + 1,$$

$$\therefore m^2 - 2x_0m + x_0^2 - 2y_0(\frac{1}{4}m^2 - m + 1) + y_0^2 = 2(\frac{1}{4}m^2 - m + 1) + 1,$$

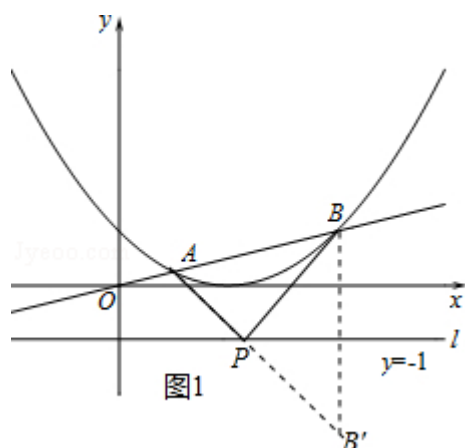
$$\text{整理得: } (1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}y_0)m^2 + (2 - 2x_0 + 2y_0)m + x_0^2 + y_0^2 - 2y_0 - 3 = 0.$$

∵ m 为任意值,

$$\therefore \begin{cases} 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}y_0 = 0 \\ 2 - 2x_0 + 2y_0 = 0 \\ x_0^2 + y_0^2 - 2y_0 - 3 = 0 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = 1 \end{cases},$$

∴ 定点 F 的坐标为 (2, 1).

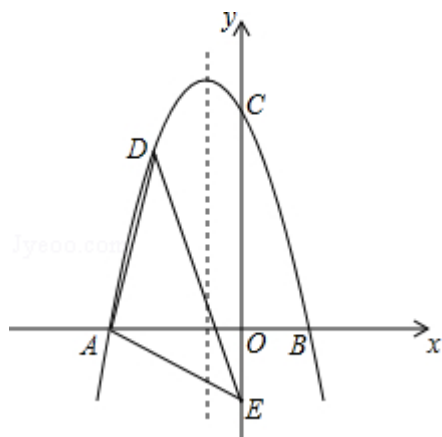


【点评】本题考查了待定系数法求二次（一次）函数解析式、二次（一次）函数图象上点的坐标特征、轴对称中的最短路径问题以及解方程组，解题的关键是：

（1）根据点的坐标，利用待定系数法求出二次函数解析式；（2）利用两点之间线段最短找出点 P 的位置；（3）根据点 M 到直线 l 的距离与点 M 到点 F 的距离总是相等结合二次函数图象上点的坐标特征，找出关于  $x_0$ 、 $y_0$  的方程组。

26. 如图，在平面直角坐标系中，二次函数  $y=ax^2+bx+c$  交 x 轴于点 A（-4，0）、B（2，0），交 y 轴于点 C（0，6），在 y 轴上有一点 E（0，-2），连接 AE.

- （1）求二次函数的表达式；
- （2）若点 D 为抛物线在 x 轴负半轴上方的一个动点，求  $\triangle ADE$  面积的最大值；
- （3）抛物线对称轴上是否存在点 P，使  $\triangle AEP$  为等腰三角形？若存在，请直接写出所有 P 点的坐标，若不存在请说明理由。



【分析】（1）把已知点坐标代入函数解析式，得出方程组求解即可；

（2）根据函数解析式设出点 D 坐标，过点 D 作  $DG \perp x$  轴，交 AE 于点 F，表示  $\triangle ADE$  的面积，运用二次函数分析最值即可；

(3) 设出点 P 坐标，分  $PA=PE$ ， $PA=AE$ ， $PE=AE$  三种情况讨论分析即可。

【解答】解：(1)  $\because$  二次函数  $y=ax^2+bx+c$  经过点 A (-4, 0)、B (2, 0)，C (0, 6)，

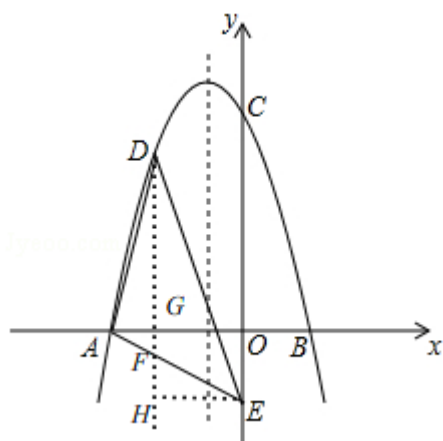
$$\therefore \begin{cases} 16a-4b+c=0 \\ 4a+2b+c=0 \\ c=6 \end{cases},$$

$$\text{解得, } \begin{cases} a=-\frac{3}{4} \\ b=-\frac{3}{2} \\ c=6 \end{cases}$$

所以二次函数的解析式为：  $y=-\frac{3}{4}x^2-\frac{3}{2}x+6$ ，

(2) 由 A (-4, 0)，E (0, -2)，可求 AE 所在直线解析式为  $y=-\frac{1}{2}x-2$ ，

过点 D 作  $DN \perp x$  轴，交 AE 于点 F，交 x 轴于点 G，过点 E 作  $EH \perp DF$ ，垂足为 H，  
如图



设 D ( $m$ ,  $-\frac{3}{4}m^2-\frac{3}{2}m+6$ )，则点 F ( $m$ ,  $-\frac{1}{2}m-2$ )，

$$\therefore DF = -\frac{3}{4}m^2 - \frac{3}{2}m + 6 - (-\frac{1}{2}m - 2) = -\frac{3}{4}m^2 - m + 8,$$

$$\therefore S_{\triangle ADE} = S_{\triangle ADF} + S_{\triangle EDF} = \frac{1}{2} \times DF \times AG + \frac{1}{2} \times DF \times EH$$

$$= \frac{1}{2} \times DF \times AG + \frac{1}{2} \times DF \times EH$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times DF$$

$$= 2 \times (-\frac{3}{4}m^2 - m + 8)$$

$$= -\frac{3}{2}(m+\frac{2}{3})^2 + \frac{50}{3},$$



∴当  $m = -\frac{2}{3}$  时,  $\triangle ADE$  的面积取得最大值为  $\frac{50}{3}$ .

(3)  $y = -\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + 6$  的对称轴为  $x = -1$ ,

设  $P(-1, n)$ , 又  $E(0, -2)$ ,  $A(-4, 0)$ ,

可求  $PA = \sqrt{9+n^2}$ ,  $PE = \sqrt{1+(n+2)^2}$ ,  $AE = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$ ,

当  $PA = PE$  时,  $\sqrt{9+n^2} = \sqrt{1+(n+2)^2}$ ,

解得,  $n = 1$ , 此时  $P(-1, 1)$ ;

当  $PA = AE$  时,  $\sqrt{9+n^2} = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$ ,

解得,  $n = \pm\sqrt{11}$ , 此时点  $P$  坐标为  $(-1, \pm\sqrt{11})$ ;

当  $PE = AE$  时,  $\sqrt{1+(n+2)^2} = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$ ,

解得,  $n = -2 \pm\sqrt{19}$ , 此时点  $P$  坐标为:  $(-1, -2 \pm\sqrt{19})$ .

综上所述,

$P$  点的坐标为:  $(-1, 1)$ ,  $(-1, \pm\sqrt{11})$ ,  $(-1, -2 \pm\sqrt{19})$ .

**【点评】**此题主要考查二次函数的综合问题, 会求抛物线解析式, 会运用二次函数分析三角形面积的最大值, 会分类讨论解决等腰三角形的顶点的存在问题时解决此题的关键.

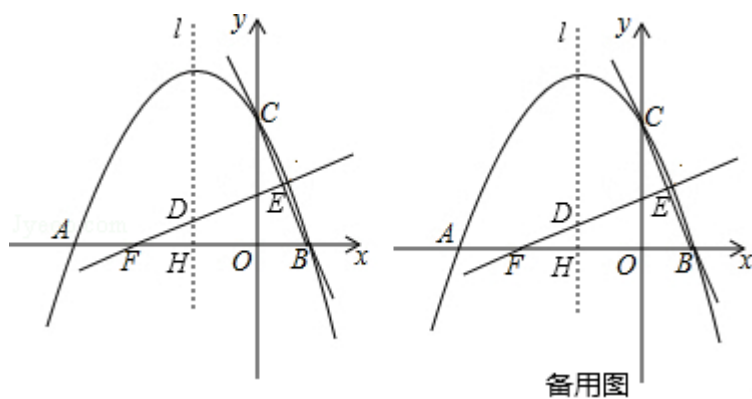
27. 如图, 抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) 与  $x$  轴交于点  $A(-4, 0)$ ,  $B(2, 0)$ , 与  $y$  轴交于点  $C(0, 4)$ , 线段  $BC$  的中垂线与对称轴  $l$  交于点  $D$ , 与  $x$  轴交于点  $F$ , 与  $BC$  交于点  $E$ , 对称轴  $l$  与  $x$  轴交于点  $H$ .

(1) 求抛物线的函数表达式;

(2) 求点  $D$  的坐标;

(3) 点  $P$  为  $x$  轴上一点,  $\odot P$  与直线  $BC$  相切于点  $Q$ , 与直线  $DE$  相切于点  $R$ . 求点  $P$  的坐标;

(4) 点  $M$  为  $x$  轴上方抛物线上的点, 在对称轴  $l$  上是否存在一点  $N$ , 使得以点  $D, P, M, N$  为顶点的四边形是平行四边形? 若存在, 则直接写出  $N$  点坐标; 若不存在, 请说明理由.



【分析】（1）利用待定系数法问题可解；

（2）依据垂直平分线性质，利用勾股定理构造方程；

（3）由题意画示意图可以发现有两种可能性，确定方案后利用锐角三角函数定义构造方程，求出半径及点 P 坐标；

（4）通过分类讨论画出可能图形，注意利用平行四边形的性质，同一对角线上的两个端点到另一对角线距离相等．

【解答】解：（1） $\because$  抛物线过点 A（-4，0），B（2，0）

$\therefore$  设抛物线表达式为： $y=a(x+4)(x-2)$

把 C（0，4）代入得

$$4=a(0+4)(0-2)$$

$$\therefore a=-\frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{抛物线表达式为：} y=-\frac{1}{2}(x+4)(x-2)=-\frac{1}{2}x^2-x+4$$

$$\text{（2）由（1）抛物线对称轴为直线 } x=-\frac{b}{2a}=-1$$

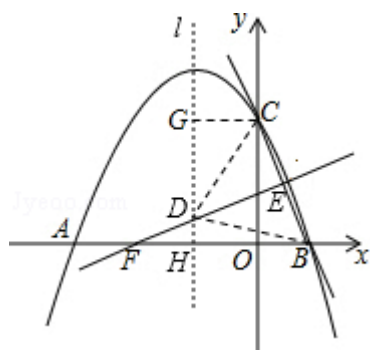
$\because$  线段 BC 的中垂线与对称轴 l 交于点 D

$\therefore$  点 D 在对称轴上

设点 D 坐标为（-1，m）

过点 C 做  $CG \perp l$  于 G，连 DC，DB

$$\therefore DC=DB$$



在  $Rt\triangle DCG$  和  $Rt\triangle DBH$  中

$$\therefore DC^2 = 1^2 + (4 - m)^2, \quad DB^2 = m^2 + (2 + 1)^2$$

$$\therefore 1^2 + (4 - m)^2 = m^2 + (2 + 1)^2$$

解得:  $m=1$

∴点 D 坐标为  $(-1, 1)$

(3)  $\because$  点 B 坐标为  $(2, 0)$ , C 点坐标为  $(0, 4)$

$$\therefore BC = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$$

$\therefore EF$  为  $BC$  中垂线

$$\therefore BE = \sqrt{5}$$

在  $\text{Rt}\triangle BEF$  和  $\text{Rt}\triangle BOC$  中,

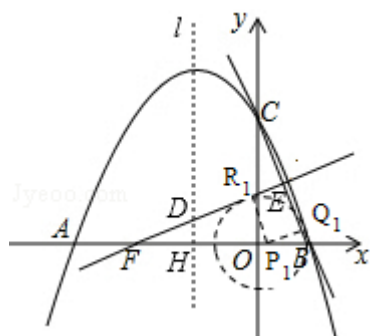
$$\cos \angle CBF = \frac{BE}{BF} = \frac{OB}{BC}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{5}}{BF} = \frac{2}{2\sqrt{5}}$$

$$\therefore BF=5, EF=\sqrt{BF^2-BE^2}=2\sqrt{5}, OF=3$$

设 $\odot P$ 的半径为 $r$ ,  $\odot P$ 与直线 $BC$ 和 $EF$ 都相切

如图:



①当圆心  $P_1$  在直线  $BC$  左侧时, 连  $P_1Q_1$ ,  $P_1R_1$ , 则  $P_1Q_1=P_1R_1=r_1$

$$\therefore \angle P_1Q_1E = \angle P_1R_1E = \angle R_1EQ_1 = 90^\circ$$

$\therefore$  四边形  $P_1Q_1ER_1$  是正方形

$$\therefore ER_1 = P_1Q_1 = r_1$$

在  $Rt\triangle BEF$  和  $Rt\triangle FR_1P_1$  中

$$\tan \angle 1 = \frac{BE}{EF} = \frac{P_1R_1}{FR_1}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{r_1}{2\sqrt{5} - r_1}$$

$$\therefore r_1 = \frac{2\sqrt{5}}{3}$$

$$\therefore \sin \angle 1 = \frac{BE}{BF} = \frac{P_1R_1}{FP_1}$$

$$\therefore FP_1 = \frac{10}{3}, OP_1 = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \text{点 } P_1 \text{ 坐标为 } \left(\frac{1}{3}, 0\right)$$

②同理，当圆心  $P_2$  在直线  $BC$  右侧时，

$$\text{可求 } r_2 = 2\sqrt{5}, OP_2 = 7$$

$$\therefore P_2 \text{ 坐标为 } (7, 0)$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 坐标为 } \left(\frac{1}{3}, 0\right) \text{ 或 } (7, 0)$$

(4) 存在

$$\text{当点 } P \text{ 坐标为 } \left(\frac{1}{3}, 0\right) \text{ 时，}$$

①若  $DN$  和  $MP$  为平行四边形对边，则有  $DN = MP$

$$\text{当 } x = \frac{1}{3} \text{ 时， } y = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} + 4 = \frac{65}{18}$$

$$\therefore DN = MP = \frac{65}{18}$$

$$\therefore \text{点 } N \text{ 坐标为 } \left(-1, \frac{83}{18}\right)$$

②若  $MN$ 、 $DP$  为平行四边形对边时， $M$ 、 $P$  点到  $ND$  距离相等

$$\text{则点 } M \text{ 横坐标为 } -\frac{7}{3}$$

$$\text{则 } M \text{ 纵坐标为 } -\frac{1}{2} \times \left(-\frac{7}{3}\right)^2 + \frac{7}{3} + 4 = \frac{65}{18}$$

由平行四边形中心对称性可知，点  $M$  到  $N$  的垂直距离等于点  $P$  到点  $D$  的垂直距离

当点  $N$  在  $D$  点上方时，点  $N$  纵坐标为  $\frac{65}{18} - 1 = \frac{47}{18}$

此时点  $N$  坐标为  $(-1, \frac{47}{18})$

当点  $N$  在  $x$  轴下方时，点  $N$  坐标为  $(-1, -\frac{47}{18})$

当点  $P$  坐标为  $(7, 0)$  时，所求  $N$  点不存在.

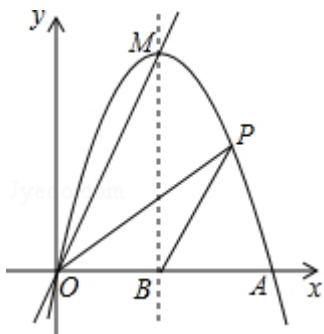
故答案为： $(-1, \frac{83}{18})$ 、 $(-1, \frac{47}{18})$ 、 $(-1, -\frac{47}{18})$

**【点评】** 本题综合考查二次函数、圆和平行四边形存在性的判定等相关知识，应用了数形结合思想和分类讨论的数学思想.

28. 如图，抛物线  $y=ax^2+bx$  ( $a \neq 0$ ) 交  $x$  轴正半轴于点  $A$ ，直线  $y=2x$  经过抛物线的顶点  $M$ . 已知该抛物线的对称轴为直线  $x=2$ ，交  $x$  轴于点  $B$ .

(1) 求  $a$ ,  $b$  的值.

(2)  $P$  是第一象限内抛物线上的一点，且在对称轴的右侧，连接  $OP$ ,  $BP$ . 设点  $P$  的横坐标为  $m$ ,  $\triangle OBP$  的面积为  $S$ , 记  $K=\frac{S}{m}$ . 求  $K$  关于  $m$  的函数表达式及  $K$  的范围.



**【分析】** (1) 根据直线  $y=2x$  求得点  $M(2, 4)$ ，由抛物线的对称轴及抛物线上的点  $M$  的坐标列出关于  $a$ 、 $b$  的方程组，解之可得；

(2) 作  $PH \perp x$  轴，根据三角形的面积公式求得  $S = -m^2 + 4m$ ，根据公式可得  $K$  的解析式，再结合点  $P$  的位置得出  $m$  的范围，利用一次函数的性质可得答案.

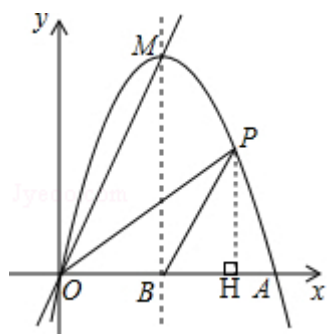
**【解答】** 解：(1) 将  $x=2$  代入  $y=2x$ ，得：  $y=4$ ，

$\therefore$  点  $M(2, 4)$ ，

由题意，得： 
$$\begin{cases} -\frac{b}{2a}=2, \\ 4a+2b=4 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} a=-1, \\ b=4 \end{cases}$$

(2) 如图，过点 P 作  $PH \perp x$  轴于点 H，



$\because$  点 P 的横坐标为  $m$ ，抛物线的解析式为  $y = -x^2 + 4x$ ，

$$\therefore PH = -m^2 + 4m,$$

$$\because B(2, 0),$$

$$\therefore OB = 2,$$

$$\therefore S = \frac{1}{2} OB \cdot PH$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times (-m^2 + 4m)$$

$$= -m^2 + 4m,$$

$$\therefore K = \frac{S}{m} = -m + 4,$$

由题意得  $A(4, 0)$ ，

$$\because M(2, 4),$$

$$\therefore 2 < m < 4,$$

$\because K$  随着  $m$  的增大而减小，

$$\therefore 0 < K < 2.$$

**【点评】** 本题主要考查抛物线与  $x$  轴的交点，解题的关键是掌握待定系数法求函数解析式及一次函数的性质等知识点.

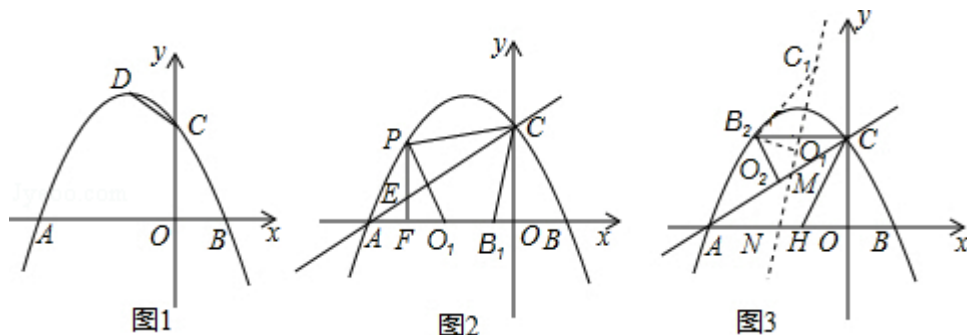
29. 抛物线  $y = -\frac{\sqrt{6}}{6}x^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{6}$  与  $x$  轴交于点 A, B (点 A 在点 B 的左边)，与

y 轴交于点 C，点 D 是该抛物线的顶点．

(1) 如图 1，连接 CD，求线段 CD 的长；

(2) 如图 2，点 P 是直线 AC 上方抛物线上一点， $PF \perp x$  轴于点 F，PF 与线段 AC 交于点 E；将线段 OB 沿 x 轴左右平移，线段 OB 的对应线段是  $O_1B_1$ ，当  $PE + \frac{1}{2}EC$  的值最大时，求四边形  $PO_1B_1C$  周长的最小值，并求出对应的点  $O_1$  的坐标；

(3) 如图 3，点 H 是线段 AB 的中点，连接 CH，将  $\triangle OBC$  沿直线 CH 翻折至  $\triangle O_2B_2C$  的位置，再将  $\triangle O_2B_2C$  绕点  $B_2$  旋转一周，在旋转过程中，点  $O_2$ ，C 的对应点分别是点  $O_3$ ， $C_1$ ，直线  $O_3C_1$  分别与直线 AC，x 轴交于点 M，N．那么，在  $\triangle O_2B_2C$  的整个旋转过程中，是否存在恰当的位置，使  $\triangle AMN$  是以 MN 为腰的等腰三角形？若存在，请直接写出所有符合条件的线段  $O_2M$  的长；若不存在，请说明理由．



【分析】(1) 分别表示 C 和 D 的坐标，利用勾股定理可得 CD 的长；

(2) 令  $y=0$ ，可求得  $A(-3\sqrt{2}, 0)$ ， $B(\sqrt{2}, 0)$ ，利用待定系数法可计算直线 AC 的解析式为： $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{6}$ ，设  $E(x, \frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{6})$ ， $P(x, -\frac{\sqrt{6}}{6}x^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{6})$ ，表示 PE 的长，利用勾股定理计算 AC 的长，发现  $\angle CAO = 30^\circ$ ，得  $AE = 2EF = \frac{2\sqrt{3}}{3}x + 2\sqrt{6}$ ，计算  $PE + \frac{1}{2}EC$ ，利用配方法可得当  $PE + \frac{1}{2}EC$  的值最大时， $x = -2\sqrt{2}$ ，此时  $P(-2\sqrt{2}, \sqrt{6})$ ，确定要使四边形  $PO_1B_1C$  周长的最小，即  $PO_1 + B_1C$  的值最小，将点 P 向右平移  $\sqrt{2}$  个单位长度得点  $P_1(-\sqrt{2}, \sqrt{6})$ ，连接  $P_1B_1$ ，则  $PO_1 = P_1B_1$ ，再作点  $P_1$  关于 x 轴的对称点  $P_2(-\sqrt{2}, -\sqrt{6})$ ，可得结论；

(3) 先确定对折后  $O_2C$  落在 AC 上， $\triangle AMN$  是以 MN 为腰的等腰三角形存在四种情况：

①如图 4， $AN = MN$ ，证明  $\triangle C_1EC \cong \triangle B_2O_2M$ ，可计算  $O_2M$  的长；

②如图 5， $AM = MN$ ，此时 M 与 C 重合， $O_2M = O_2C = \sqrt{6}$ ；

③如图 6，AM=MN，N 和 H、C<sub>1</sub> 重合，可得结论；

④如图 7，AN=MN，过 C<sub>1</sub> 作 C<sub>1</sub>E⊥AC 于 E 证明四边形 C<sub>1</sub>EO<sub>2</sub>B<sub>2</sub> 是矩形，根据 O<sub>2</sub>M=EO<sub>2</sub>+EM 可得结论.

【解答】解：（1）如图 1，过点 D 作 DK⊥y 轴于 K，

当 x=0 时，y=√6，

∴C (0, √6)，

$$y = -\frac{\sqrt{6}}{6}x^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{6} = -\frac{\sqrt{6}}{6}(x+\sqrt{2})^2 + \frac{4\sqrt{6}}{3},$$

∴D (-√2,  $\frac{4\sqrt{6}}{3}$ ),

$$\therefore DK = \sqrt{2}, CK = \frac{4\sqrt{6}}{3} - \sqrt{6} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

$$\therefore CD = \sqrt{DK^2 + CK^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\frac{\sqrt{6}}{3})^2} = \frac{2\sqrt{6}}{3}; \text{ (4 分)}$$

（2）在  $y = -\frac{\sqrt{6}}{6}x^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{6}$  中，令 y=0，则  $-\frac{\sqrt{6}}{6}x^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{6} = 0$ ,

解得：x<sub>1</sub> = -3√2, x<sub>2</sub> = √2,

∴A (-3√2, 0), B (√2, 0),

∴C (0, √6),

易得直线 AC 的解析式为：y =  $\frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{6}$ ,

设 E (x,  $\frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{6}$ ), P (x,  $-\frac{\sqrt{6}}{6}x^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{6}$ ),

$$\therefore PF = -\frac{\sqrt{6}}{6}x^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{6}, EF = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{6},$$

Rt△ACO 中，AO=3√2, OC=√6，

$$\therefore AC = 2\sqrt{6},$$

$$\therefore \angle CAO = 30^\circ,$$

$$\therefore AE = 2EF = \frac{2\sqrt{3}}{3}x + 2\sqrt{6},$$

$$\therefore PE + \frac{1}{2}EC = (-\frac{\sqrt{6}}{6}x^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{6}) - (\frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{6}) + \frac{1}{2}(AC - AE),$$

$$= -\frac{\sqrt{6}}{6}x^2 - \sqrt{3}x + \frac{1}{2}[2\sqrt{6} - (\frac{2\sqrt{3}}{3}x + 2\sqrt{6})],$$

$$= -\frac{\sqrt{6}}{6}x^2 - \sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3}x,$$

$$= -\frac{\sqrt{6}}{6}(x+2\sqrt{2})^2 + \frac{4\sqrt{6}}{3}, \text{ (5 分)}$$



∴当  $PE + \frac{1}{2}EC$  的值最大时,  $x = -2\sqrt{2}$ , 此时  $P(-2\sqrt{2}, \sqrt{6})$ , (6分)

$$\therefore PC = 2\sqrt{2},$$

$$\because O_1B_1 = OB = \sqrt{2},$$

∴要使四边形  $PO_1B_1C$  周长的最小, 即  $PO_1 + B_1C$  的值最小,

如图 2, 将点  $P$  向右平移  $\sqrt{2}$  个单位长度得点  $P_1(-\sqrt{2}, \sqrt{6})$ , 连接  $P_1B_1$ , 则  $PO_1 = P_1B_1$ ,

再作点  $P_1$  关于  $x$  轴的对称点  $P_2(-\sqrt{2}, -\sqrt{6})$ , 则  $P_1B_1 = P_2B_1$ ,

$$\therefore PO_1 + B_1C = P_2B_1 + B_1C,$$

∴连接  $P_2C$  与  $x$  轴的交点即为使  $PO_1 + B_1C$  的值最小时的点  $B_1$ ,

$$\therefore B_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right),$$

将  $B_1$  向左平移  $\sqrt{2}$  个单位长度即得点  $O_1$ ,

$$\text{此时 } PO_1 + B_1C = P_2C = \sqrt{(2\sqrt{6})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{26},$$

对应的点  $O_1$  的坐标为  $\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ , (7分)

∴四边形  $PO_1B_1C$  周长的最小值为  $\sqrt{26} + 3\sqrt{2}$ ; (8分)

(3)  $O_2M$  的长度为  $\frac{\sqrt{6}}{3}$  或  $\sqrt{6}$  或  $2\sqrt{2} + \sqrt{6}$  或  $2\sqrt{2} - \sqrt{6}$ . (12分)

理由是: 如图 3,  $\because H$  是  $AB$  的中点,

$$\therefore OH = \sqrt{2},$$

$$\because OC = \sqrt{6},$$

$$\therefore CH = BC = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore \angle HCO = \angle BCO = 30^\circ,$$

$$\because \angle ACO = 60^\circ,$$

∴将  $CO$  沿  $CH$  对折后落在直线  $AC$  上, 即  $O_2$  在  $AC$  上,

$$\therefore \angle B_2CA = \angle CAB = 30^\circ,$$

$$\therefore B_2C \parallel AB,$$

$$\therefore B_2(-2\sqrt{2}, \sqrt{6}),$$

①如图 4,  $AN = MN$ ,

$$\therefore \angle MAN = \angle AMN = 30^\circ = \angle O_2B_2O_3,$$

由旋转得:  $\angle CB_2C_1 = \angle O_2B_2O_3 = 30^\circ$ ,  $B_2C = B_2C_1$ ,

$$\therefore \angle B_2CC_1 = \angle B_2C_1C = 75^\circ,$$

过  $C_1$  作  $C_1E \perp B_2C$  于  $E$ ,

$$\because B_2C = B_2C_1 = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore C_1E = \sqrt{2} = B_2O_2, \quad B_2E = \sqrt{6},$$

$$\because \angle O_2MB_2 = \angle B_2MO_3 = 75^\circ = \angle B_2CC_1,$$

$$\angle B_2O_2M = \angle C_1EC = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle C_1EC \cong \triangle B_2O_2M,$$

$$\therefore O_2M = CE = B_2C - B_2E = 2\sqrt{2} - \sqrt{6};$$

②如图 5,  $AM = MN$ , 此时  $M$  与  $C$  重合,  $O_2M = O_2C = \sqrt{6}$ ,

③如图 6,  $AM = MN$ ,

$$\because B_2C = B_2C_1 = 2\sqrt{2} = B_2H, \text{ 即 } N \text{ 和 } H、C_1 \text{ 重合},$$

$$\therefore \angle CAO = \angle AHM = \angle MHO_2 = 30^\circ,$$

$$\therefore O_2M = \frac{1}{3}AO_2 = \frac{\sqrt{6}}{3};$$

④如图 7,  $AN = MN$ , 过  $C_1$  作  $C_1E \perp AC$  于  $E$ ,

$$\therefore \angle NMA = \angle NAM = 30^\circ,$$

$$\because \angle O_3C_1B_2 = 30^\circ = \angle O_3MA,$$

$$\therefore C_1B_2 \parallel AC,$$

$$\therefore \angle C_1B_2O_2 = \angle AO_2B_2 = 90^\circ,$$

$$\because \angle C_1EC = 90^\circ,$$

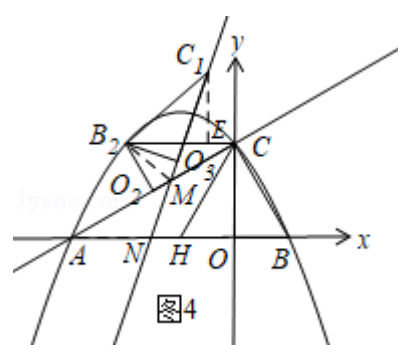
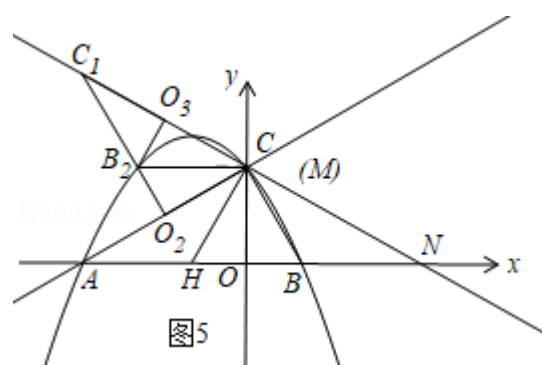
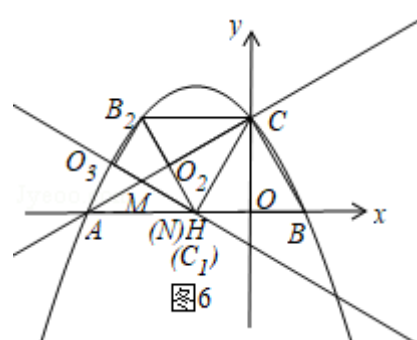
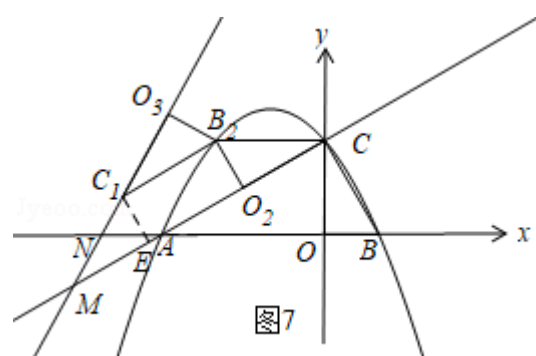
$\therefore$  四边形  $C_1EO_2B_2$  是矩形,

$$\therefore EO_2 = C_1B_2 = 2\sqrt{2}, \quad C_1E = B_2O_2 = \sqrt{2},$$

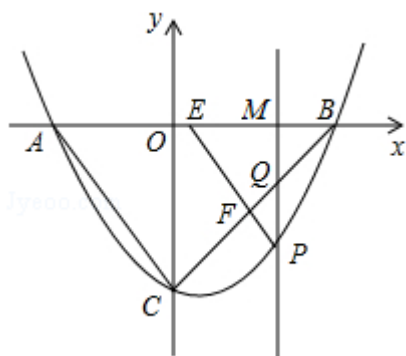
$$\therefore EM = \sqrt{6},$$

$$\therefore O_2M = EO_2 + EM = 2\sqrt{2} + \sqrt{6},$$

综上所述,  $O_2M$  的长是  $\frac{\sqrt{6}}{3}$  或  $\sqrt{6}$  或  $2\sqrt{2} + \sqrt{6}$  或  $2\sqrt{2} - \sqrt{6}$ .







【分析】(1) 解方程  $\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - 4 = 0$  得 A(-3, 0), B(4, 0), 计算自变量为 0 时的二次函数值得 C 点坐标;

(2) 利用勾股定理计算出  $AC=5$ , 利用待定系数法可求得直线 BC 的解析式为  $y=x-4$ , 则可设 Q(m, m-4) ( $0 < m < 4$ ), 讨论: 当  $CQ=CA$  时, 则  $m^2 + (m-4+4)^2 = 5^2$ ,

当  $AQ=AC$  时,  $(m+3)^2 + (m-4)^2 = 5^2$ ; 当  $QA=QC$  时,  $(m+3)^2 + (m-4)^2 = 5^2$ , 然后分别解方程求出 m 即可得到对应的 Q 点坐标;

(3) 过点 F 作  $FG \perp PQ$  于点 G, 如图, 由  $\triangle OBC$  为等腰直角三角形, 可判断  $\triangle FQG$  为等腰直角三角形, 则  $FG=QG=\frac{\sqrt{2}}{2}FQ$ , 再证明  $\triangle FGP \sim \triangle AOC$  得到  $\frac{FG}{3} = \frac{PG}{4}$ , 则  $PG = \frac{2\sqrt{2}}{3}FQ$ , 所以  $PQ = \frac{7\sqrt{2}}{6}FQ$ , 于是得到  $FQ = \frac{3\sqrt{2}}{7}PQ$ , 设  $P(m, \frac{1}{3}m^2 - \frac{1}{3}m - 4)$  ( $0 < m < 4$ ), 则  $Q(m, m-4)$ , 利用  $PQ = -\frac{1}{3}m^2 + \frac{4}{3}m$  得到  $FQ = \frac{3\sqrt{2}}{7}(-\frac{1}{3}m^2 + \frac{4}{3}m)$ , 然后利用二次函数的性质解决问题.

【解答】解: (1) 当  $y=0$ ,  $\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - 4 = 0$ , 解得  $x_1 = -3$ ,  $x_2 = 4$ ,

$\therefore A(-3, 0)$ ,  $B(4, 0)$ ,

当  $x=0$ ,  $y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - 4 = -4$ ,

$\therefore C(0, -4)$ ;

(2)  $AC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ ,

易得直线 BC 的解析式为  $y=x-4$ ,

设  $Q(m, m-4)$  ( $0 < m < 4$ ),

当  $CQ=CA$  时,  $m^2 + (m-4+4)^2 = 5^2$ , 解得  $m_1 = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ ,  $m_2 = -\frac{5\sqrt{2}}{2}$  (舍去), 此时 Q

点坐标为  $(\frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{5\sqrt{2}}{2} - 4)$ ;

当  $AQ=AC$  时,  $(m+3)^2 + (m-4)^2 = 5^2$ , 解得  $m_1=1$ ,  $m_2=0$  (舍去), 此时 Q 点坐标为  $(1, -3)$ ;

当  $QA=QC$  时,  $(m+3)^2 + (m-4)^2 = 5^2$ , 解得  $m=\frac{25}{2}$  (舍去),

综上所述, 满足条件的 Q 点坐标为  $(\frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{5\sqrt{2}}{2} - 4)$  或  $(1, -3)$ ;

(3) 解: 过点 F 作  $FG \perp PQ$  于点 G, 如图,

则  $FG \parallel x$  轴. 由  $B(4, 0)$ ,  $C(0, -4)$  得  $\triangle OBC$  为等腰直角三角形

$$\therefore \angle OBC = \angle QFG = 45^\circ$$

$\therefore \triangle FQG$  为等腰直角三角形,

$$\therefore FG = QG = \frac{\sqrt{2}}{2} FQ,$$

$\because PE \parallel AC$ ,  $PG \parallel CO$ ,

$$\therefore \angle FPG = \angle ACO,$$

$$\because \angle FGP = \angle AOC = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle FGP \sim \triangle AOC.$$

$$\therefore \frac{FG}{OA} = \frac{PG}{CO}, \text{ 即 } \frac{FG}{3} = \frac{PG}{4},$$

$$\therefore PG = \frac{4}{3} FG = \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} FQ = \frac{2\sqrt{2}}{3} FQ,$$

$$\therefore PQ = PG + GQ = \frac{2\sqrt{2}}{3} FQ + \frac{\sqrt{2}}{2} FQ = \frac{7\sqrt{2}}{6} FQ,$$

$$\therefore FQ = \frac{3\sqrt{2}}{7} PQ,$$

设  $P(m, \frac{1}{3}m^2 - \frac{1}{3}m - 4)$  ( $0 < m < 4$ ), 则  $Q(m, m-4)$ ,

$$\therefore PQ = m - 4 - (\frac{1}{3}m^2 - \frac{1}{3}m - 4) = -\frac{1}{3}m^2 + \frac{4}{3}m,$$

$$\therefore FQ = \frac{3\sqrt{2}}{7} (-\frac{1}{3}m^2 + \frac{4}{3}m) = -\frac{\sqrt{2}}{7} (m-2)^2 + \frac{4\sqrt{2}}{7}$$

$$\because -\frac{\sqrt{2}}{7} < 0,$$

$\therefore QF$  有最大值.

$\therefore$  当  $m=2$  时,  $QF$  有最大值.



元二次方程，解之即可得出结论；

(3) (解法一) 作  $\angle CBA$  的角平分线，交  $y$  轴于点  $E$ ，过点  $E$  作  $EF \perp BC$  于点  $F$ ，设  $OE=n$ ，则  $CE=2-n$ ， $EF=n$ ，利用面积法可求出  $n$  值，进而可得出  $\frac{OC}{OA} = \frac{1}{2} = \frac{OE}{OB}$ ，结合  $\angle AOC = 90^\circ = \angle BOE$  可证出  $\triangle AOC \sim \triangle BOE$ ，根据相似三角形的性质可得出  $\angle CAO = \angle EBO$ ，再根据角平分线的性质可得出  $\angle CBA = 2\angle EBO = 2\angle CAB$ ，此题得解；

(解法二) 将  $BC$  沿  $y$  轴对折，交  $x$  轴于点  $B'$ ，根据点  $A$ 、 $B$ 、 $C$  的坐标可得出点  $B'$  的坐标，进而可得出  $AB' = B'C = BC$ ，根据等腰三角形的性质结合三角形的外角性质，可得出  $\angle CBA = 2\angle CAB$ 。

【解答】解：(1)  $\because$  点  $A(-4, 0)$  在二次函数  $y = -\frac{1}{3}x^2 + bx + 2$  的图象上，

$$\therefore -\frac{16}{3} - 4b + 2 = 0,$$

$$\therefore b = -\frac{5}{6}.$$

$$\text{当 } y=0 \text{ 时，有 } -\frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{6}x + 2 = 0,$$

$$\text{解得：} x_1 = -4, x_2 = \frac{3}{2},$$

$$\therefore \text{点 } B \text{ 的坐标为 } \left(\frac{3}{2}, 0\right).$$

$$\text{故答案为：} -\frac{5}{6}; \left(\frac{3}{2}, 0\right).$$

$$(2) \text{ 当 } x=0 \text{ 时，} y = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{6}x + 2 = 2,$$

$$\therefore \text{点 } C \text{ 的坐标为 } (0, 2).$$

设直线  $AC$  的解析式为  $y=kx+c$  ( $k \neq 0$ ),

将  $A(-4, 0)$ 、 $C(0, 2)$  代入  $y=kx+c$  中，

$$\text{得：} \begin{cases} -4k+c=0 \\ c=2 \end{cases}, \text{ 解得：} \begin{cases} k=\frac{1}{2} \\ c=2 \end{cases},$$

$$\therefore \text{直线 } AC \text{ 的解析式为 } y=\frac{1}{2}x+2.$$

假设存在，设点  $M$  的坐标为  $(m, \frac{1}{2}m+2)$ 。

$$\text{① 当点 } P、B \text{ 在直线 } AC \text{ 的异侧时，点 } P \text{ 的坐标为 } \left(\frac{3}{2}m - \frac{3}{4}, \frac{3}{4}m + 3\right),$$

$$\because \text{点 } P \text{ 在抛物线 } y = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{6}x + 2 \text{ 上，}$$



$$\therefore \frac{3}{4}m+3 = -\frac{1}{3} \times \left(\frac{3}{2}m - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{5}{6} \times \left(\frac{3}{2}m - \frac{3}{4}\right) + 2,$$

整理，得： $12m^2+20m+9=0$ .

$$\because \Delta = 20^2 - 4 \times 12 \times 9 = -32 < 0,$$

$\therefore$  方程无解，即不存在符合题意得点 P；

②当点 P、B 在直线 AC 的同侧时，点 P 的坐标为  $\left(\frac{1}{2}m+\frac{3}{4}, \frac{1}{4}m+1\right)$ ,

$\because$  点 P 在抛物线  $y = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{6}x + 2$  上，

$$\therefore \frac{1}{4}m+1 = -\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}m+\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{5}{6} \times \left(\frac{1}{2}m+\frac{3}{4}\right) + 2,$$

整理，得： $4m^2+44m-9=0$ ,

$$\text{解得：} m_1 = -\frac{11+\sqrt{130}}{2}, m_2 = \frac{-11+\sqrt{130}}{2},$$

$\therefore$  点 P 的横坐标为  $-2 - \frac{\sqrt{130}}{4}$  或  $-2 + \frac{\sqrt{130}}{4}$ .

综上所述：存在点 P，使得  $PM:MB=1:2$ ，点 P 的横坐标为  $-2 - \frac{\sqrt{130}}{4}$  或  $-2 + \frac{\sqrt{130}}{4}$ .

(3) (解法一)  $\angle CBA=2\angle CAB$ ，理由如下：

作  $\angle CBA$  的角平分线，交 y 轴于点 E，过点 E 作  $EF \perp BC$  于点 F，如图 2 所示.

$\because$  点 B  $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ ，点 C  $(0, 2)$ ，

$$\therefore OB = \frac{3}{2}, OC = 2, BC = \frac{5}{2}.$$

设  $OE=n$ ，则  $CE=2-n$ ， $EF=n$ ，

由面积法，可知： $\frac{1}{2}OB \cdot CE = \frac{1}{2}BC \cdot EF$ ，即  $\frac{3}{2}(2-n) = \frac{5}{2}n$ ，

解得： $n = \frac{3}{4}$ .

$$\therefore \frac{OC}{OA} = \frac{1}{2} = \frac{OE}{OB}, \angle AOC = 90^\circ = \angle BOE,$$

$$\therefore \triangle AOC \sim \triangle BOE,$$

$$\therefore \angle CAO = \angle EBO,$$

$$\therefore \angle CBA = 2\angle EBO = 2\angle CAB.$$

(解法二)  $\angle CBA=2\angle CAB$ ，理由如下：

将 BC 沿 y 轴对折，交 x 轴于点 B'，如图 3 所示.

$\because$  点 B  $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ ，点 C  $(0, 2)$ ，点 A  $(-4, 0)$ ，

$$\therefore \text{点 } B' \left( -\frac{3}{2}, 0 \right),$$

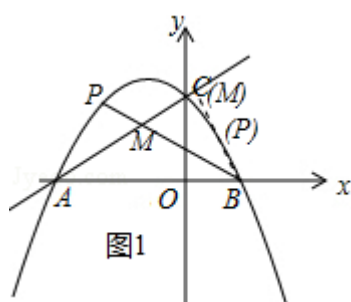
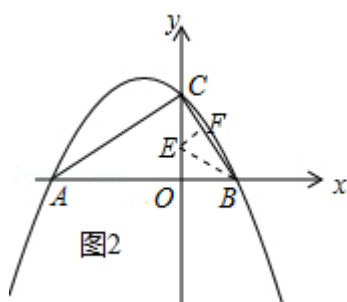
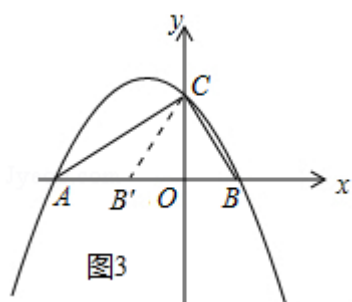
$$\therefore AB' = -\frac{3}{2} - (-4) = \frac{5}{2}, \quad B'C = \sqrt{2^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{5}{2},$$

$$\therefore AB' = B'C = BC,$$

$$\therefore \angle CAB = \angle ACB', \quad \angle CBA = \angle CB'B.$$

$$\because \angle AB'B = \angle CAB + \angle ACB',$$

$$\therefore \angle CBA = 2\angle CAB.$$



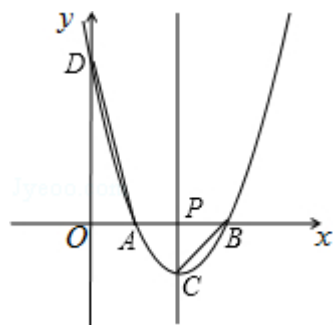
**【点评】**题考查了二次函数图象上点的坐标特征、待定系数法求一次函数解析式、三角形的面积、勾股定理、一次函数图象上点的坐标特征以及相似三角形的判定与性质，解题的关键是：（1）由点 A 的坐标，利用二次函数图象上点的坐标特征求出 b 的值；（2）分 B、P 在直线 AC 的同侧和异侧两种情况找出点 P 的坐标；（3）（解法一）构造相似三角形找出两角的数量关系；（解法二）根据等腰三角形的性质结合三角形的外角性质找出  $\angle CBA = 2\angle CAB$ 。

32. 如图，在平面直角坐标系中，二次函数  $y = (x - a)(x - 3)$  ( $0 < a < 3$ ) 的图象与  $x$  轴交于点  $A$ 、 $B$  (点  $A$  在点  $B$  的左侧)，与  $y$  轴交于点  $D$ ，过其顶点  $C$  作直线  $CP \perp x$  轴，垂足为点  $P$ ，连接  $AD$ 、 $BC$ 。

(1) 求点  $A$ 、 $B$ 、 $D$  的坐标；

(2) 若  $\triangle AOD$  与  $\triangle BPC$  相似，求  $a$  的值；

(3) 点  $D$ 、 $O$ 、 $C$ 、 $B$  能否在同一个圆上？若能，求出  $a$  的值；若不能，请说明理由。



**【分析】** (1) 根据函数解析式可以直接得到抛物线与  $x$  轴的两个交点坐标；令  $x=0$ ，即可求得点  $D$  的纵坐标；

(2) 由抛物线顶点坐标公式求得点  $C$  的坐标，易得线段  $PB$ 、 $PC$  的长度；

①若  $\triangle AOD \sim \triangle BPC$  时，则  $\frac{AO}{BP} = \frac{DO}{CP}$ ，将相关线段的长度代入求得  $a$  的值；

②若  $\triangle AOD \sim \triangle CPB$  时，则  $\frac{AO}{CP} = \frac{DO}{PB}$ ，将相关线段的长度代入求得  $a$  的值；

(3) 能。理由如下：联结  $BD$ ，取中点  $M$ ，则  $D$ 、 $O$ 、 $B$  在同一个圆上，且圆心  $M$  为  $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}a)$ 。若点  $C$  也在圆上，则  $MC=MB$ 。根据两点间的坐标求得相关线段的长度，借助于方程解答即可。

**【解答】** 解：(1)  $\because y = (x - a)(x - 3)$  ( $0 < a < 3$ )，

$\therefore A(a, 0)$ ， $B(3, 0)$ 。

当  $x=0$  时， $y=3a$ ，

$\therefore D(0, 3a)$ ；

(2)  $\because A(a, 0)$ ， $B(3, 0)$ ，

$\therefore$  对称轴直线方程为： $x = \frac{3+a}{2}$ 。

当  $x = \frac{3+a}{2}$  时,  $y = -\left(\frac{3-a}{2}\right)^2$ ,

$\therefore C\left(\frac{3+a}{2}, -\left(\frac{3-a}{2}\right)^2\right)$ ,

$PB = 3 - \frac{3+a}{2}$ ,  $PC = \left(\frac{3-a}{2}\right)^2$ ,

①若  $\triangle AOD \sim \triangle BPC$  时, 则  $\frac{AO}{BP} = \frac{DO}{CP}$ , 即  $\frac{a}{3 - \frac{3+a}{2}} = \frac{3a}{\left(\frac{3-a}{2}\right)^2}$ ,

解得  $a = \pm 3$  (舍去);

②若  $\triangle AOD \sim \triangle CPB$  时, 则  $\frac{AO}{CP} = \frac{DO}{PB}$ , 即  $\frac{a}{\left(\frac{3-a}{2}\right)^2} = \frac{3a}{3 - \frac{3+a}{2}}$ ,

解得  $a = 3$  (舍去) 或  $a = \frac{7}{3}$ .

所以  $a$  的值是  $\frac{7}{3}$ .

(3) 能. 理由如下:

联结  $BD$ , 取中点  $M$

$\because D, O, B$  在同一个圆上, 且圆心  $M$  为  $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}a\right)$ .

若点  $C$  也在圆上, 则  $MC = MB$ . 即  $\left(\frac{3}{2} - \frac{3+a}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}a + \left(\frac{3-a}{2}\right)^2\right)^2 = \left(\frac{3}{2} - 3\right)^2 +$

$\left(\frac{3}{2}a - 0\right)^2$ ,

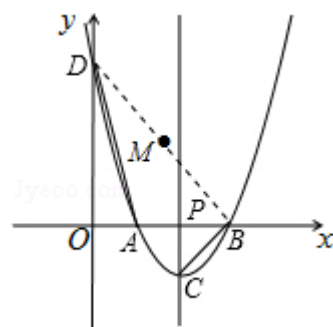
整理, 得

$a^4 - 14a^2 + 45 = 0$ ,

所以  $(a^2 - 5)(a^2 - 9) = 0$ ,

解得  $a_1 = \sqrt{5}$ ,  $a_2 = -\sqrt{5}$  (舍),  $a_3 = 3$  (舍),  $a_4 = -3$  (舍),

$\therefore a = \sqrt{5}$ .



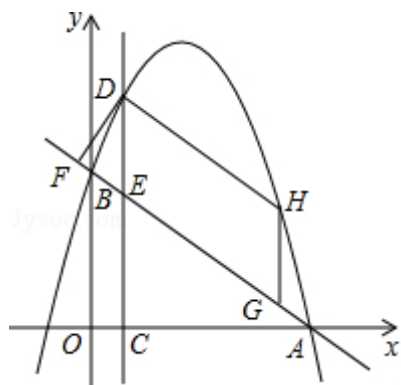
**【点评】**考查了二次函数综合题，需要掌握二次函数解析式的三种形式，抛物线对称轴的求法，相似三角形的判定与性质，圆周角定理，方程思想的应用．解题时，注意“分类讨论”、“方程思想”等数学思想的应用，难度较大．

33. 如图，已知二次函数  $y=ax^2 - (2a - \frac{3}{4})x+3$  的图象经过点 A (4, 0)，与 y 轴交于点 B. 在 x 轴上有一动点 C (m, 0) ( $0 < m < 4$ )，过点 C 作 x 轴的垂线交直线 AB 于点 E，交该二次函数图象于点 D.

(1) 求 a 的值和直线 AB 的解析式；

(2) 过点 D 作  $DF \perp AB$  于点 F，设  $\triangle ACE$ ， $\triangle DEF$  的面积分别为  $S_1$ ， $S_2$ ，若  $S_1=4S_2$ ，求 m 的值；

(3) 点 H 是该二次函数图象上位于第一象限的动点，点 G 是线段 AB 上的动点，当四边形 DEGH 是平行四边形，且  $\square DEGH$  周长取最大值时，求点 G 的坐标.



**【分析】**(1) 把点 A 坐标代入  $y=ax^2 - (2a - \frac{3}{4})x+3$  可求 a，应用待定系数法可求直线 AB 的解析式；

(2) 用 m 表示 DE、AC，易证  $\triangle DEF \sim \triangle AEC$ ， $S_1=4S_2$ ，得到 DE 与 AE 的数量关系可以构造方程；

(3) 用 n 表示 GH，由平行四边形性质  $DE=GH$ ，可得 m，n 之间数量关系，利用相似用 GM 表示 EG，表示  $\square DEGH$  周长，利用函数性质求出周长最大时的 m 值，可得 n 值，进而求 G 点坐标.

**【解答】**解：(1) 把点 A (4, 0) 代入，得

$$0=a \cdot 4^2 - (2a - \frac{3}{4}) \times 4 + 3$$

解得

$$a = -\frac{3}{4}$$

$$\therefore \text{函数解析式为: } y = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{4}x + 3$$

设直线 AB 解析式为  $y = kx + b$

把 A (4, 0), B (0, 3) 代入

$$\begin{cases} 0 = 4k + b \\ b = 3 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = -\frac{3}{4} \\ b = 3 \end{cases}$$

$$\therefore \text{直线 AB 解析式为: } y = -\frac{3}{4}x + 3$$

(2) 由已知,

$$\text{点 D 坐标为 } (m, -\frac{3}{4}m^2 + \frac{9}{4}m + 3)$$

$$\text{点 E 坐标为 } (m, -\frac{3}{4}m + 3)$$

$$\therefore AC = 4 - m$$

$$DE = (-\frac{3}{4}m^2 + \frac{9}{4}m + 3) - (-\frac{3}{4}m + 3) = -\frac{3}{4}m^2 + 3m$$

$\because BC \parallel y$  轴

$$\therefore \frac{AC}{EC} = \frac{AO}{OB} = \frac{4}{3}$$

$$\therefore AE = \frac{5}{4}(4 - m)$$

$$\because \angle DFA = \angle DCA = 90^\circ, \angle FBD = \angle CEA$$

$$\therefore \triangle DEF \sim \triangle AEC$$

$$\therefore S_1 = 4S_2$$

$$\therefore AE = 2DE$$

$$\therefore \frac{5}{4}(4 - m) = 2(-\frac{3}{4}m^2 + 3m)$$

$$\text{解得 } m_1 = \frac{5}{6}, m_2 = 4 \text{ (舍去)}$$

$$\text{故 } m \text{ 值为 } \frac{5}{6}$$

(3) 如图, 过点 G 做  $GM \perp DC$  于点 M



由 (2)  $DE = -\frac{3}{4}m^2 + 3\pi$

同理  $HG = -\frac{3}{4}n^2 + 3n$

∴ 四边形 DEGH 是平行四边形

$$\therefore -\frac{3}{4}m^2 + 3\pi = -\frac{3}{4}n^2 + 3n$$

整理得:  $(n - m) [\frac{3}{4}(n+m) - 3] = 0$

$$\therefore m \neq n$$

$$\therefore m+n=4, \text{ 即 } n=4-m$$

$$\therefore MG = n - m = 4 - 2m$$

由已知 $\triangle EMG \sim \triangle BOA$

$$\therefore \frac{MG}{EM} = \frac{4}{3}$$

$$\therefore EG = \frac{5}{4}(4 - 2m)$$

$$\therefore \square DEGH \text{ 周长 } L = 2 \left[ -\frac{3}{4}m^2 + 3m + \frac{5}{4}(4-2m) \right] = -\frac{3}{2}m^2 + m + 10$$

$$\therefore a = -\frac{3}{2} < 0$$

$$\therefore m = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2 \times (-\frac{3}{2})} = \frac{1}{3} \text{ 时, } L \text{ 最大.}$$

$$\therefore n = 4 - \frac{1}{3} = \frac{11}{3}$$

∴G 点坐标为  $(\frac{11}{3}, \frac{1}{4})$ , 此时点 E 坐标为  $(\frac{1}{3}, \frac{11}{4})$

当点 G、E 位置对调时，依然满足条件

$$\therefore \text{点 G 坐标为 } \left(\frac{11}{3}, \frac{1}{4}\right) \text{ 或 } \left(\frac{1}{3}, \frac{11}{4}\right)$$

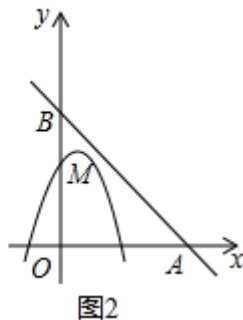
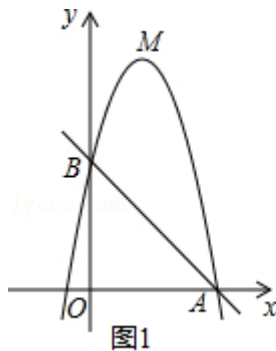
**【点评】** 本题以二次函数图象为背景，综合考查三角形相似、平行四边形性质、二次函数最值讨论以转化的数学思想.

34. 已知，点  $M$  为二次函数  $y = -(x - b)^2 + 4b + 1$  图象的顶点，直线  $y = mx + 5$  分别交  $x$  轴正半轴， $y$  轴于点  $A$ ， $B$ .

(1) 判断顶点  $M$  是否在直线  $y = 4x + 1$  上，并说明理由.

(2) 如图 1，若二次函数图象也经过点  $A$ ， $B$ ，且  $mx + 5 > -(x - b)^2 + 4b + 1$ ，根据图象，写出  $x$  的取值范围.

(3) 如图 2，点  $A$  坐标为  $(5, 0)$ ，点  $M$  在  $\triangle AOB$  内，若点  $C(\frac{1}{4}, y_1)$ ， $D(\frac{3}{4}, y_2)$  都在二次函数图象上，试比较  $y_1$  与  $y_2$  的大小.



**【分析】** (1) 根据顶点式解析式，可得顶点坐标，根据点的坐标代入函数解析式检验，可得答案；

(2) 根据待定系数法，可得二次函数的解析式，根据函数图象与不等式的关系：图象在下方的函数值小，可得答案；

(3) 根据解方程组，可得顶点  $M$  的纵坐标的范围，根据二次函数的性质，可得答案.

**【解答】** 解：(1) 点  $M$  为二次函数  $y = -(x - b)^2 + 4b + 1$  图象的顶点，  
 $\therefore M$  的坐标是  $(b, 4b + 1)$ ，

把  $x = b$  代入  $y = 4x + 1$ ，得  $y = 4b + 1$ ，

$\therefore$  点  $M$  在直线  $y = 4x + 1$  上；

(2) 如图 1，

直线  $y = mx + 5$  交  $y$  轴于点  $B$ ，

$\therefore B$  点坐标为  $(0, 5)$  又  $B$  在抛物线上，



$$\therefore 5 = -(0-b)^2 + 4b + 1 = 5, \text{ 解得 } b=2,$$

二次函数的解析是为  $y = -(x-2)^2 + 9$ ,

当  $y=0$  时,  $-(x-2)^2 + 9 = 0$ , 解得  $x_1=5, x_2=-1$ ,

$$\therefore A(5, 0).$$

由图象, 得

当  $mx+5 > -(x-b)^2 + 4b+1$  时,  $x$  的取值范围是  $x < 0$  或  $x > 5$ ;

(3) 如图 2,

$\because$  直线  $y=4x+1$  与直线  $AB$  交于点  $E$ , 与  $y$  轴交于  $F$ ,

$A(5, 0), B(0, 5)$  得

直线  $AB$  的解析式为  $y = -x+5$ ,

联立  $EF, AB$  得

$$\text{方程组} \begin{cases} y=4x+1 \\ y=-x+5 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} x=\frac{4}{5} \\ y=\frac{21}{5} \end{cases},$$

$$\therefore \text{点 } E\left(\frac{4}{5}, \frac{21}{5}\right), F(0, 1).$$

点  $M$  在  $\triangle AOB$  内,

$$1 < 4b+1 < \frac{21}{5}$$

$$\therefore 0 < b < \frac{4}{5}.$$

$$\text{当点 } C, D \text{ 关于抛物线的对称轴对称时, } b - \frac{1-\frac{3}{4}}{4} = b, \therefore b = \frac{1}{2},$$

且二次函数图象开口向下, 顶点  $M$  在直线  $y=4x+1$  上,

综上: ①当  $0 < b < \frac{1}{2}$  时,  $y_1 > y_2$ ,

②当  $b = \frac{1}{2}$  时,  $y_1 = y_2$ ,

③当  $\frac{1}{2} < b < \frac{4}{5}$  时,  $y_1 < y_2$ .

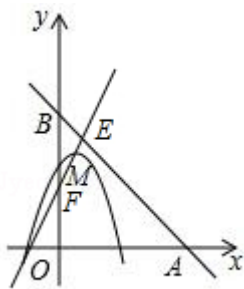


图2

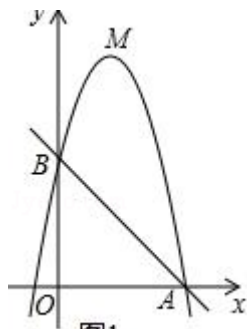


图1

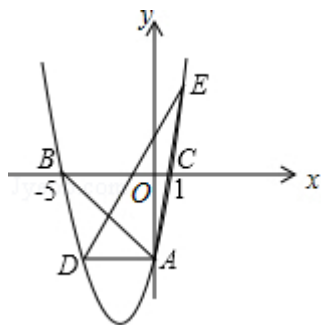
【点评】 本题考查了二次函数综合题，解（1）的关键是把点的坐标代入函数解析式检验；解（2）的关键是利用函数图不等式的关系：图象在上方的函数值大；解（3）的关键是解方程组得出顶点 M 的纵坐标的范围，又利用了二次函数的性质： $a < 0$  时，点与对称轴的距离越小函数值越大。

35. 如图，在平面直角坐标系中，抛物线  $y = ax^2 + bx - 5$  交  $y$  轴于点 A，交  $x$  轴于点 B（-5，0）和点 C（1，0），过点 A 作  $AD \parallel x$  轴交抛物线于点 D。

（1）求此抛物线的表达式；

（2）点 E 是抛物线上一点，且点 E 关于  $x$  轴的对称点在直线 AD 上，求  $\triangle EAD$  的面积；

（3）若点 P 是直线 AB 下方的抛物线上一动点，当点 P 运动到某一位置时， $\triangle ABP$  的面积最大，求出此时点 P 的坐标和  $\triangle ABP$  的最大面积。



【分析】（1）根据题意可以求得  $a$ 、 $b$  的值，从而可以求得抛物线的表达式；

(2) 根据题意可以求得 AD 的长和点 E 到 AD 的距离, 从而可以求得  $\triangle EAD$  的面积;

(3) 根据题意可以求得直线 AB 的函数解析式, 再根据题意可以求得  $\triangle ABP$  的面积, 然后根据二次函数的性质即可解答本题.

【解答】解: (1)  $\because$  抛物线  $y=ax^2+bx-5$  交 y 轴于点 A, 交 x 轴于点 B (-5, 0) 和点 C (1, 0),

$$\therefore \begin{cases} 25a-5b-5=0 \\ a+b-5=0 \end{cases}, \text{ 得 } \begin{cases} a=1 \\ b=4 \end{cases},$$

$\therefore$  此抛物线的表达式是  $y=x^2+4x-5$ ;

(2)  $\because$  抛物线  $y=x^2+4x-5$  交 y 轴于点 A,

$\therefore$  点 A 的坐标为 (0, -5),

$\because AD \parallel x$  轴, 点 E 是抛物线上一点, 且点 E 关于 x 轴的对称点在直线 AD 上,

$\therefore$  点 E 的纵坐标是 5, 点 E 到 AD 的距离是 10,

当  $y=-5$  时,  $-5=x^2+4x-5$ , 得  $x=0$  或  $x=-4$ ,

$\therefore$  点 D 的坐标为 (-4, -5),

$\therefore AD=4$ ,

$\therefore \triangle EAD$  的面积是:  $\frac{4 \times 10}{2} = 20$ ;

(3) 设点 P 的坐标为 (p,  $p^2+4p-5$ ), 如右图所示,

设过点 A (0, -5), 点 B (-5, 0) 的直线 AB 的函数解析式为  $y=mx+n$ ,

$$\begin{cases} n=-5 \\ -5m+n=0 \end{cases}, \text{ 得 } \begin{cases} m=-1 \\ n=-5 \end{cases},$$

即直线 AB 的函数解析式为  $y=-x-5$ ,

当  $x=p$  时,  $y=-p-5$ ,

$\because OB=5$ ,

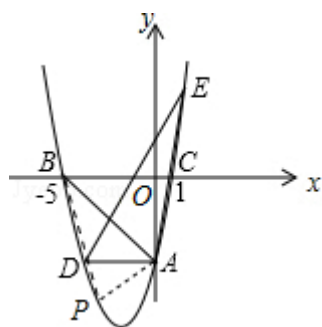
$\therefore \triangle ABP$  的面积是:  $S = \frac{(-p-5)-(-p^2+4p-5)}{2} \cdot 5 = \frac{5}{2} \left[ -\left(p+\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{25}{4} \right]$ ,

$\because$  点 P 是直线 AB 下方的抛物线上一动点,

$\therefore -5 < p < 0$ ,

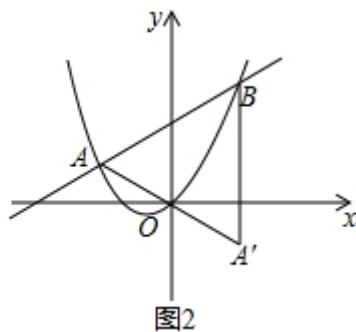
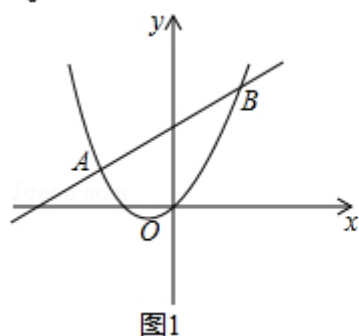
$\therefore$  当  $p = -\frac{5}{2}$  时, S 取得最大值, 此时  $S = \frac{125}{8}$ , 点 p 的坐标是  $\left(-\frac{5}{2}, -\frac{35}{4}\right)$ ,

即点 p 的坐标是  $\left(-\frac{5}{2}, -\frac{35}{4}\right)$  时,  $\triangle ABP$  的面积最大, 此时  $\triangle ABP$  的面积是  $\frac{125}{8}$ .



【点评】 本题考查二次函数综合题，解答本题的关键是明确题意，找出所求问题需要的条件，利用数形结合思想和二次函数的性质解答．

36. 已知抛物线  $F: y=x^2+bx+c$  的图象经过坐标原点  $O$ ，且与  $x$  轴另一交点为  $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0)$ ．



(1) 求抛物线  $F$  的解析式；

(2) 如图 1，直线  $l: y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+m$  ( $m>0$ ) 与抛物线  $F$  相交于点  $A(x_1, y_1)$  和点  $B(x_2, y_2)$  (点  $A$  在第二象限)，求  $y_2 - y_1$  的值 (用含  $m$  的式子表示)；

(3) 在 (2) 中，若  $m=\frac{4}{3}$ ，设点  $A'$  是点  $A$  关于原点  $O$  的对称点，如图 2．

①判断  $\triangle AA'B$  的形状，并说明理由；

②平面内是否存在点  $P$ ，使得以点  $A$ 、 $B$ 、 $A'$ 、 $P$  为顶点的四边形是菱形？若存在，求出点  $P$  的坐标；若不存在，请说明理由．

【分析】 (1) 根据点的坐标，利用待定系数法即可求出抛物线  $F$  的解析式；

(2) 将直线  $l$  的解析式代入抛物线  $F$  的解析式中，可求出  $x_1$ 、 $x_2$  的值，利用一次函数图象上点的坐标特征可求出  $y_1$ 、 $y_2$  的值，做差后即可得出  $y_2 - y_1$  的值；

(3) 根据  $m$  的值可得出点  $A$ 、 $B$  的坐标，利用对称性求出点  $A'$  的坐标．

①利用两点间的距离公式 (勾股定理) 可求出  $AB$ 、 $AA'$ 、 $A'B$  的值，由三者相等即可得出  $\triangle AA'B$  为等边三角形；

②根据等边三角形的性质结合菱形的性质，可得出存在符合题意得点 P，设点 P 的坐标为 (x, y)，分三种情况考虑：(i) 当 A'B 为对角线时，根据菱形的性质（对角线互相平分）可求出点 P 的坐标；(ii) 当 AB 为对角线时，根据菱形的性质（对角线互相平分）可求出点 P 的坐标；(iii) 当 AA' 为对角线时，根据菱形的性质（对角线互相平分）可求出点 P 的坐标。综上即可得出结论。

**【解答】**解：(1)  $\because$  抛物线  $y=x^2+bx+c$  的图象经过点 (0, 0) 和  $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0)$ ,

$$\therefore \begin{cases} c=0 \\ \frac{1}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}b+c=0 \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} b=\frac{\sqrt{3}}{3} \\ c=0 \end{cases},$$

$\therefore$  抛物线 F 的解析式为  $y=x^2+\frac{\sqrt{3}}{3}x$ .

(2) 将  $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+m$  代入  $y=x^2+\frac{\sqrt{3}}{3}x$ , 得:  $x^2=m$ ,

解得:  $x_1=-\sqrt{m}$ ,  $x_2=\sqrt{m}$ ,

$$\therefore y_1=-\frac{1}{3}\sqrt{3m}+m, y_2=\frac{1}{3}\sqrt{3m}+m,$$

$$\therefore y_2 - y_1 = (\frac{1}{3}\sqrt{3m}+m) - (-\frac{1}{3}\sqrt{3m}+m) = \frac{2}{3}\sqrt{3m} \quad (m>0).$$

(3)  $\because m=\frac{4}{3}$ ,

$\therefore$  点 A 的坐标为  $(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2}{3})$ , 点 B 的坐标为  $(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 2)$ .

$\because$  点 A' 是点 A 关于原点 O 的对称点,

$\therefore$  点 A' 的坐标为  $(\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{2}{3})$ .

①  $\triangle AA'B$  为等边三角形, 理由如下:

$$\because A(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2}{3}), B(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 2), A'(\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{2}{3}),$$

$$\therefore AA'=\frac{8}{3}, AB=\frac{8}{3}, A'B=\frac{8}{3},$$

$$\therefore AA'=AB=A'B,$$

$\therefore \triangle AA'B$  为等边三角形.

②  $\because \triangle AA'B$  为等边三角形,

$\therefore$  存在符合题意的点 P, 且以点 A、B、A'、P 为顶点的菱形分三种情况, 设点 P 的坐标为 (x, y).

(i) 当  $A'B$  为对角线时, 有 
$$\begin{cases} x - \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \times 2 \\ y = \frac{2}{3} \end{cases},$$

解得: 
$$\begin{cases} x = 2\sqrt{3} \\ y = \frac{2}{3} \end{cases},$$

$\therefore$  点  $P$  的坐标为  $(2\sqrt{3}, \frac{2}{3})$ ;

(ii) 当  $AB$  为对角线时, 有 
$$\begin{cases} x = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \\ y - \frac{2}{3} = \frac{2}{3} + 2 \end{cases},$$

解得: 
$$\begin{cases} x = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \\ y = \frac{10}{3} \end{cases},$$

$\therefore$  点  $P$  的坐标为  $(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{10}{3})$ ;

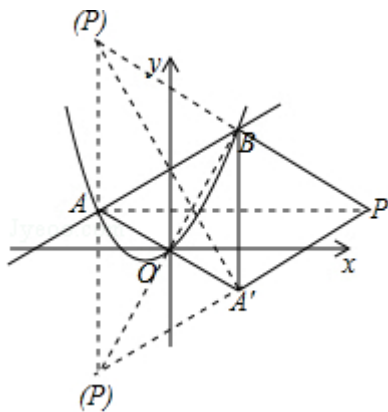
(iii) 当  $AA'$  为对角线时, 有 
$$\begin{cases} x = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \\ y + 2 = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \end{cases},$$

解得: 
$$\begin{cases} x = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \\ y = -2 \end{cases},$$

$\therefore$  点  $P$  的坐标为  $(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, -2)$ .

综上所述: 平面内存在点  $P$ , 使得以点  $A$ 、 $B$ 、 $A'$ 、 $P$  为顶点的四边形是菱形, 点

$P$  的坐标为  $(2\sqrt{3}, \frac{2}{3})$ 、 $(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{10}{3})$  和  $(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, -2)$ .



**【点评】** 本题考查了待定系数法求二次函数解析式、一次函数图象上点的坐标特征、等边三角形的判定与性质以及菱形的判定与性质, 解题的关键是: (1) 根据

点的坐标，利用待定系数法求出二次函数解析式；（2）将一次函数解析式代入二次函数解析式中求出  $x_1$ 、 $x_2$  的值；（3）①利用勾股定理（两点间的距离公式）求出  $AB$ 、 $AA'$ 、 $A'B$  的值；②分  $A'B$  为对角线、 $AB$  为对角线及  $AA'$  为对角线三种情况求出点  $P$  的坐标.

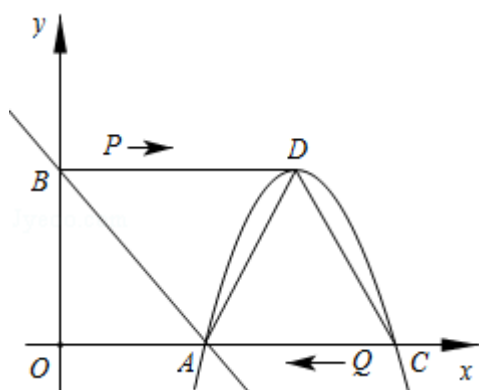
37. 直线  $y = -\frac{3}{2}x + 3$  交  $x$  轴于点  $A$ ，交  $y$  轴于点  $B$ ，顶点为  $D$  的抛物线  $y = -\frac{3}{4}x^2 + 2mx - 3m$  经过点  $A$ ，交  $x$  轴于另一点  $C$ ，连接  $BD$ ， $AD$ ， $CD$ ，如图所示.

（1）直接写出抛物线的解析式和点  $A$ ， $C$ ， $D$  的坐标；

（2）动点  $P$  在  $BD$  上以每秒 2 个单位长的速度由点  $B$  向点  $D$  运动，同时动点  $Q$  在  $CA$  上以每秒 3 个单位长的速度由点  $C$  向点  $A$  运动，当其中一个点到达终点停止运动时，另一个点也随之停止运动，设运动时间为  $t$  秒.  $PQ$  交线段  $AD$  于点  $E$ .

①当  $\angle DPE = \angle CAD$  时，求  $t$  的值；

②过点  $E$  作  $EM \perp BD$ ，垂足为点  $M$ ，过点  $P$  作  $PN \perp BD$  交线段  $AB$  或  $AD$  于点  $N$ ，当  $PN = EM$  时，求  $t$  的值.



**【分析】**（1）先由直线解析式求得点  $A$ 、 $B$  坐标，将点  $A$  坐标代入抛物线解析式求得  $m$  的值，从而得出答案；

（2）①由（1）知  $BD = AC$ 、 $BD \parallel OC$ ，根据  $AB = AD = \sqrt{13}$  证四边形  $ABPQ$  是平行四边形得  $AQ = BP$ ，即  $2t = 4 - 3t$ ，解之即可；②分点  $N$  在  $AB$  上和点  $N$  在  $AD$  上两种情况分别求解.

**【解答】**解：（1）在  $y = -\frac{3}{2}x + 3$  中，令  $x = 0$  得  $y = 3$ ，令  $y = 0$  得  $x = 2$ ，

$\therefore$  点  $A(2, 0)$ 、点  $B(0, 3)$ ，

将点  $A(2, 0)$  代入抛物线解析式，得：  $-\frac{3}{4} \times 4 + 4m - 3m = 0$ ，

解得：m=3，

所以抛物线解析式为  $y = -\frac{3}{4}x^2 + 6x - 9$ ，

$$\therefore y = -\frac{3}{4}x^2 + 6x - 9 = -\frac{3}{4}(x-4)^2 + 3,$$

$\therefore$  点 D (4, 3)，对称轴为  $x=4$ ，

$\therefore$  点 C 坐标为 (6, 0)；

(2) 如图 1，

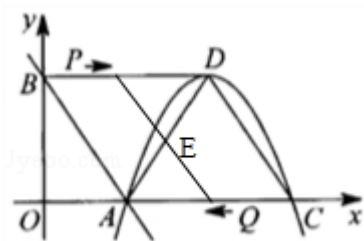


图 1

由 (1) 知  $BD=AC=4$ ，

根据  $0 \leq 3t \leq 4$ ，得：  $0 \leq t \leq \frac{4}{3}$ ，

①  $\because B(0, 3)$ 、 $D(4, 3)$ ，

$\therefore BD \parallel OC$ ，

$\therefore \angle CAD = \angle ADB$ ，

$\because \angle DPE = \angle CAD$ ，

$\therefore \angle DPE = \angle ADB$ ，

$$\because AB = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}, \quad AD = \sqrt{(4-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13},$$

$\therefore AB = AD$ ，

$\therefore \angle ABD = \angle ADB$ ，

$\therefore \angle DPE = \angle ABD$ ，

$\therefore PQ \parallel AB$ ，

$\therefore$  四边形 ABPQ 是平行四边形，

$\therefore AQ = BP$ ，即  $2t = 4 - 3t$ ，

解得：  $t = \frac{4}{5}$ ，

即当  $\angle DPE = \angle CAD$  时，  $t = \frac{4}{5}$  秒；



连接 NE, 延长 PN 交 x 轴于点 F, 延长 ME 交 x 轴于点 H,

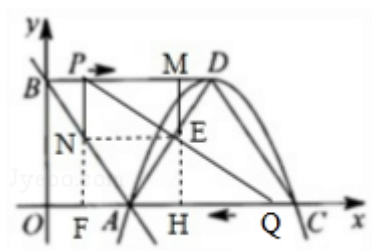


图 2

$$\therefore OF=BP=2t, PF=OB=3, NE=FH, NF=EH, NE \parallel FQ,$$

∵ 点 N 在直线  $y = -\frac{3}{2}x + 3$  上,

$$\therefore PN = PF - NF = 3 - (-3t + 3) = 3t,$$
$$\therefore \triangle PNE \sim \triangle PFQ,$$

$$\therefore \frac{NE}{FQ} = \frac{PN}{PF},$$

$$\therefore FH = NE = \frac{PN}{PF} \cdot FQ = \frac{3t}{3} \times (6 - 5t) = 6t - 5t^2,$$

∴ 直线 AD 解析式为  $y = \frac{3}{2}x - 3$ ,

∵ 点 E 在直线  $y = \frac{3}{2}x - 3$  上,

$$\therefore \text{OH} = \text{OF} + \text{FH},$$

$$\therefore 4 - 2t = 2t + 6t - 5t^2,$$

解得:  $t=1+\frac{\sqrt{5}}{5}>1$  (舍) 或  $t=1-\frac{\sqrt{5}}{5}$ ;

(II) 当点 N 在 AD 上时,  $2 < 2t \leq 4$ , 即  $1 < t \leq \frac{4}{3}$ ,

$$\therefore PN=EM,$$

∴ 点 E、N 重合，此时  $PQ \perp BD$ ，

∴  $BP = OQ$ ，

∴  $2t = 6 - 3t$ ，

解得：  $t = \frac{6}{5}$ ，

综上所述，当  $PN = EM$  时，  $t = (1 - \frac{\sqrt{5}}{5})$  秒或  $t = \frac{6}{5}$  秒。

**【点评】** 本题主要考查二次函数的综合问题，解题的关键是掌握待定系数法求二次函数的解析式、平行四边形的判定与性质、相似三角形的判定与性质等知识点。

38. 如图 1，在平面直角坐标系中，直线  $y = x - 1$  与抛物线  $y = -x^2 + bx + c$  交于 A、B 两点，其中 A (m, 0)、B (4, n)，该抛物线与 y 轴交于点 C，与 x 轴交于另一点 D。

(1) 求 m、n 的值及该抛物线的解析式；

(2) 如图 2，若点 P 为线段 AD 上的一动点（不与 A、D 重合），分别以 AP、DP 为斜边，在直线 AD 的同侧作等腰直角  $\triangle APM$  和等腰直角  $\triangle DPN$ ，连接 MN，试确定  $\triangle MPN$  面积最大时 P 点的坐标；

(3) 如图 3，连接 BD、CD，在线段 CD 上是否存在点 Q，使得以 A、D、Q 为顶点的三角形与  $\triangle ABD$  相似，若存在，请直接写出点 Q 的坐标；若不存在，请说明理由。

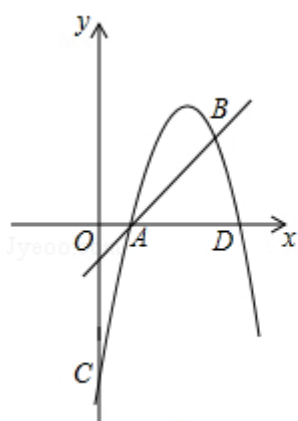


图1

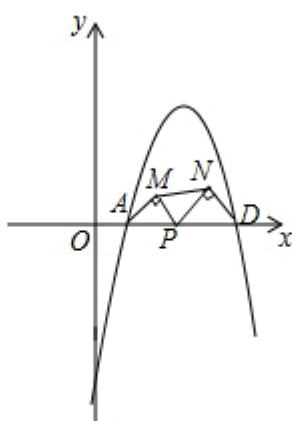


图2

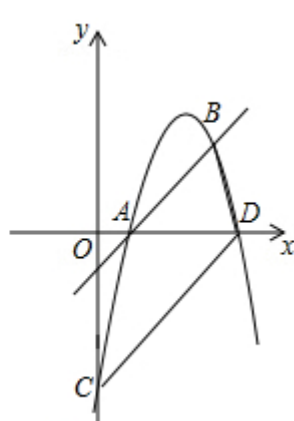


图3

**【分析】** (1) 把 A 与 B 坐标代入一次函数解析式求出 m 与 n 的值，确定出 A 与 B 坐标，代入二次函数解析式求出 b 与 c 的值即可；

(2) 由等腰直角  $\triangle APM$  和等腰直角  $\triangle DPN$ ，得到  $\angle MPN$  为直角，由两直角边乘

积的一半表示出三角形 MPN 面积，利用二次函数性质确定出三角形面积最大时 P 的坐标即可；

(3) 存在，分两种情况，根据相似得比例，求出 AQ 的长，利用两点间的距离公式求出 Q 坐标即可。

【解答】解：(1) 把 A (m, 0), B (4, n) 代入  $y=x-1$  得：m=1, n=3,

$\therefore A(1, 0), B(4, 3)$ ,

$\because y = -x^2 + bx + c$  经过点 A 与点 B,

$$\therefore \begin{cases} -1+b+c=0 \\ -16+4b+c=3 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} b=6 \\ c=-5 \end{cases},$$

则二次函数解析式为  $y = -x^2 + 6x - 5$ ;

(2) 如图 2,  $\triangle APM$  与  $\triangle DPN$  都为等腰直角三角形,

$\therefore \angle APM = \angle DPN = 45^\circ$ ,

$\therefore \angle MPN = 90^\circ$ ,

$\therefore \triangle MPN$  为直角三角形,

令  $-x^2 + 6x - 5 = 0$ , 得到  $x=1$  或  $x=5$ ,

$\therefore D(5, 0)$ , 即  $DA=5-1=4$ ,

设  $AP=m$ , 则有  $DP=4-m$ ,

$$\therefore PM = \frac{\sqrt{2}}{2}m, PN = \frac{\sqrt{2}}{2}(4-m),$$

$$\therefore S_{\triangle MPN} = \frac{1}{2}PM \cdot PN = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}m \times \frac{\sqrt{2}}{2}(4-m) = -\frac{1}{4}m^2 - m = -\frac{1}{4}(m-2)^2 + 1,$$

$\therefore$  当  $m=2$ , 即  $AP=2$  时,  $S_{\triangle MPN}$  最大, 此时  $OP=3$ , 即  $P(3, 0)$ ;

(3) 存在,

易得直线 CD 解析式为  $y=x-5$ , 设  $Q(x, x-5)$ ,

由题意得:  $\angle BAD = \angle ADC = 45^\circ$ ,

当  $\triangle ABD \sim \triangle DAQ$  时,  $\frac{AB}{DA} = \frac{BD}{AQ}$ , 即  $\frac{3\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{10}}{AQ}$ ,

$$\text{解得: } AQ = \frac{4\sqrt{5}}{3},$$

由两点间的距离公式得:  $(x-1)^2 + (x-5)^2 = \frac{80}{9}$ ,

解得:  $x = \frac{7}{3}$  (不符合题意舍去), 此时  $Q(\frac{7}{3}, -\frac{8}{3})$ ;

当 $\triangle ABD \sim \triangle DQA$ 时,  $\frac{BD}{AQ}=1$ , 即  $AQ=\sqrt{10}$ ,

$$\therefore (x-1)^2 + (x-5)^2 = 10,$$

解得:  $x=2$  (不符合题意的舍去), 此时  $Q(2, -3)$ ,

综上, 点  $Q$  的坐标为  $(2, -3)$  或  $(\frac{7}{3}, -\frac{8}{3})$ .

**【点评】**此题属于二次函数综合题, 涉及的知识有: 待定系数法求函数解析式, 二次函数的图象与性质, 相似三角形的判定与性质, 两点间的距离公式, 熟练掌握各自的性质是解本题的关键.

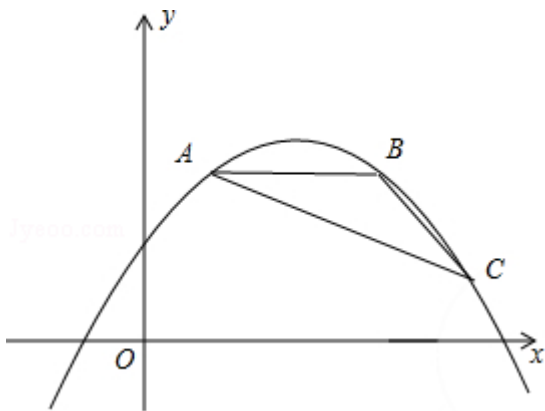
39. 如图, 点  $A, B, C$  都在抛物线  $y=ax^2 - 2amx + am^2 + 2m - 5$  (其中  $-\frac{1}{4} < a < 0$ )

上,  $AB \parallel x$  轴,  $\angle ABC = 135^\circ$ , 且  $AB=4$ .

(1) 填空: 抛物线的顶点坐标为  $(m, 2m-5)$  (用含  $m$  的代数式表示);

(2) 求  $\triangle ABC$  的面积 (用含  $a$  的代数式表示);

(3) 若  $\triangle ABC$  的面积为 2, 当  $2m-5 \leq x \leq 2m-2$  时,  $y$  的最大值为 2, 求  $m$  的值.



**【分析】**(1) 利用配方法将二次函数解析式由一般式变形为顶点式, 此题得解;

(2) 过点  $C$  作直线  $AB$  的垂线, 交线段  $AB$  的延长线于点  $D$ , 由  $AB \parallel x$  轴且  $AB=4$ , 可得出点  $B$  的坐标为  $(m+2, 4a+2m-5)$ , 设  $BD=t$ , 则点  $C$  的坐标为  $(m+2+t, 4a+2m-5-t)$ , 利用二次函数图象上点的坐标特征可得出关于  $t$  的一元二次方程, 解之取其正值即可得出  $t$  值, 再利用三角形的面积公式即可得出  $S_{\triangle ABC}$  的值;

(3) 由 (2) 的结论结合  $S_{\triangle ABC}=2$  可求出  $a$  值, 分三种情况考虑: ①当  $m > 2m-2$ , 即  $m < 2$  时,  $x=2m-2$  时  $y$  取最大值, 利用二次函数图象上点的坐标特征可得出关于  $m$  的一元二次方程, 解之可求出  $m$  的值; ②当  $2m-5 \leq m \leq 2m-2$ ,

即  $2 \leq m \leq 5$  时,  $x=m$  时  $y$  取最大值, 利用二次函数图象上点的坐标特征可得出关于  $m$  的一元一次方程, 解之可求出  $m$  的值; ③当  $m < 2m - 5$ , 即  $m > 5$  时,  $x=2m - 5$  时  $y$  取最大值, 利用二次函数图象上点的坐标特征可得出关于  $m$  的一元一次方程, 解之可求出  $m$  的值. 综上所述即可得出结论.

**【解答】**解: (1)  $\because y = ax^2 - 2amx + am^2 + 2m - 5 = a(x - m)^2 + 2m - 5$ ,

$\therefore$  抛物线的顶点坐标为  $(m, 2m - 5)$ .

故答案为:  $(m, 2m - 5)$ .

(2) 过点  $C$  作直线  $AB$  的垂线, 交线段  $AB$  的延长线于点  $D$ , 如图所示.

$\because AB \parallel x$  轴, 且  $AB=4$ ,

$\therefore$  点  $B$  的坐标为  $(m+2, 4a+2m-5)$ .

$\because \angle ABC = 135^\circ$ ,

$\therefore$  设  $BD=t$ , 则  $CD=t$ ,

$\therefore$  点  $C$  的坐标为  $(m+2+t, 4a+2m-5-t)$ .

$\because$  点  $C$  在抛物线  $y = a(x - m)^2 + 2m - 5$  上,

$\therefore 4a+2m-5-t = a(2+t)^2 + 2m-5$ ,

整理, 得:  $at^2 + (4a+1)t = 0$ ,

解得:  $t_1=0$  (舍去),  $t_2 = -\frac{4a+1}{a}$ ,

$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CD = -\frac{8a+2}{a}$ .

(3)  $\because \triangle ABC$  的面积为 2,

$\therefore -\frac{8a+2}{a} = 2$ ,

解得:  $a = -\frac{1}{5}$ ,

$\therefore$  抛物线的解析式为  $y = -\frac{1}{5}(x - m)^2 + 2m - 5$ .

分三种情况考虑:

①当  $m > 2m - 2$ , 即  $m < 2$  时, 有  $-\frac{1}{5}(2m - 2 - m)^2 + 2m - 5 = 2$ ,

整理, 得:  $m^2 - 14m + 39 = 0$ ,

解得:  $m_1 = 7 - \sqrt{10}$  (舍去),  $m_2 = 7 + \sqrt{10}$  (舍去);

②当  $2m - 5 \leq m \leq 2m - 2$ , 即  $2 \leq m \leq 5$  时, 有  $2m - 5 = 2$ ,

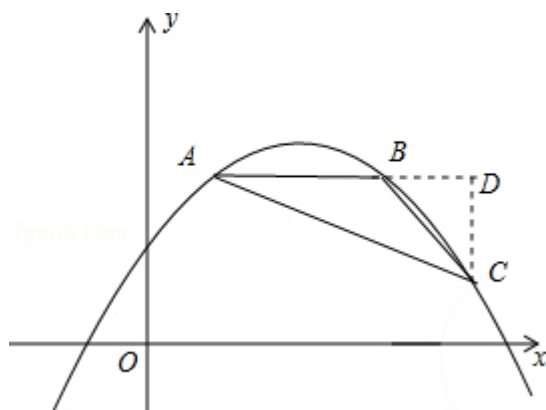
解得：  $m = \frac{7}{2}$ ;

③当  $m < 2m - 5$ ，即  $m > 5$  时，有  $-\frac{1}{5}(2m - 5 - m)^2 + 2m - 5 = 2$ ，

整理，得：  $m^2 - 20m + 60 = 0$ ，

解得：  $m_3 = 10 - 2\sqrt{10}$  (舍去)，  $m_4 = 10 + 2\sqrt{10}$ 。

综上所述：  $m$  的值为  $\frac{7}{2}$  或  $10 + 2\sqrt{10}$ 。



**【点评】**本题考查了二次函数解析式的三种形式、二次函数图象上点的坐标特征、等腰直角三角形、解一元二次方程以及二次函数的最值，解题的关键是：(1) 利用配方法将二次函数解析式变形为顶点式；(2) 利用等腰直角三角形的性质找出点 C 的坐标；(3) 分  $m < 2$ 、 $2 \leq m \leq 5$  及  $m > 5$  三种情况考虑。

40. 如图 1，在平面直角坐标系  $xOy$  中，已知点 A 和点 B 的坐标分别为 A (-2, 0)，B (0, -6)，将  $Rt\triangle AOB$  绕点 O 按顺时针方向分别旋转  $90^\circ$ ， $180^\circ$  得到  $Rt\triangle A_1OC$ ， $Rt\triangle EOF$ 。抛物线  $C_1$  经过点 C，A，B；抛物线  $C_2$  经过点 C，E，F。

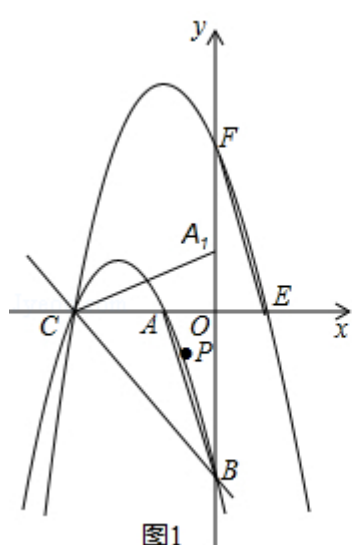


图1

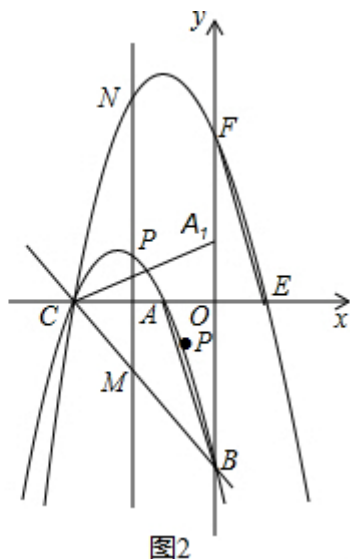


图2

(1) 点 C 的坐标为  $(-6, 0)$ ，点 E 的坐标为  $(2, 0)$ ；抛物线  $C_1$  的解析式为  $y = -\frac{1}{2}x^2 - 4x - 6$ 。抛物线  $C_2$  的解析式为  $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6$ ；

(2) 如果点 P  $(x, y)$  是直线 BC 上方抛物线  $C_1$  上的一个动点。

①若  $\angle PCA = \angle ABO$  时，求 P 点的坐标；

②如图 2，过点 P 作 x 轴的垂线交直线 BC 于点 M，交抛物线  $C_2$  于点 N，记  $h = PM + NM + \sqrt{2}BM$ ，求 h 与 x 的函数关系式，当  $-5 \leq x \leq -2$  时，求 h 的取值范围。

**【分析】**(1) 根据旋转的性质，可得 C, E, F 的坐标，根据待定系数法求解析式；

(2)①根据 P 点直线 CA 或其关于 x 轴对称直线与抛物线交点坐标，求出解析式，联立方程组求解；

②根据图象上的点满足函数解析式，可得 P、N、M 纵坐标，根据平行于 y 轴直线上两点间的距离是较大的纵坐标减较小的纵坐标，可得二次函数，根据 x 取值范围讨论 h 范围。

**【解答】**解：(1) 由旋转可知， $OC=6$ ， $OE=2$ ，

则点 C 坐标为  $(-6, 0)$ ，E 点坐标为  $(2, 0)$ ，

分别利用待定系数法求  $C_1$  解析式为： $y = -\frac{1}{2}x^2 - 4x - 6$ ，

$C_2$  解析式为： $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6$

故答案为： $(-6, 0)$ ， $(2, 0)$ ， $y = -\frac{1}{2}x^2 - 4x - 6$ ， $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6$

(2) ①若点 P 在 x 轴上方， $\angle PCA = \angle ABO$  时，则  $CA_1$  与抛物线  $C_1$  的交点即为点 P

设直线  $CA_1$  的解析式为： $y = k_1x + b_1$

$$\therefore \begin{cases} 0 = -6k_1 + b_1 \\ 2 = b_1 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} k_1 = \frac{1}{3} \\ b_1 = 2 \end{cases}$$

$\therefore$  直线  $CA_1$  的解析式为： $y = \frac{1}{3}x + 2$

$$\text{联立: } \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x^2 - 4x - 6 \\ y = \frac{1}{3}x + 2 \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} x_1 = -\frac{8}{3} \\ y_1 = \frac{10}{9} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_2 = -6 \\ y_2 = 0 \end{cases} \quad (\text{不符合题意, 舍})$$

根据题意, P 点坐标为  $(-\frac{8}{3}, \frac{10}{9})$ ;

若点 P 在 x 轴下方,  $\angle PCA = \angle ABO$  时, 则  $CA_1$  关于 x 轴对称的直线  $CA_2$  与抛物线  $C_1$  的交点即为点 P

设直线  $CA_2$  解析式为  $y = k_2x + b_2$

$$\therefore \begin{cases} 0 = -6k_2 + b_2 \\ -2 = b_2 \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} k_2 = -\frac{1}{3} \\ b_2 = -2 \end{cases}$$

$\therefore$  直线  $CA_2$  的解析式为:  $y = -\frac{1}{3}x - 2$

$$\text{联立 } \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x^2 - 4x - 6 \\ y = -\frac{1}{3}x - 2 \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} x_1 = -\frac{4}{3} \\ y_1 = -\frac{14}{9} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_2 = -6 \\ y_2 = 0 \end{cases} \quad (\text{不符合题意, 舍})$$

由题意, 点 P 坐标为  $(-\frac{4}{3}, -\frac{14}{9})$

$\therefore$  符合条件的点 P 为  $(-\frac{8}{3}, \frac{10}{9})$  或  $(-\frac{4}{3}, -\frac{14}{9})$ ;

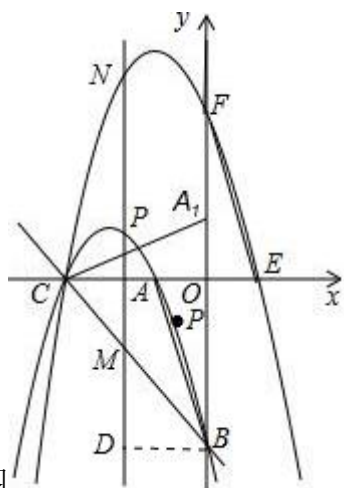
② 设直线 BC 的解析式为:  $y = kx + b$

$$\therefore \begin{cases} 0 = -6k + b \\ -6 = b \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} k = -1 \\ b = -6 \end{cases}$$

$\therefore$  设直线 BC 的解析式为:  $y = -x - 6$





过点 B 做  $BD \perp MN$  于点 D，如图

则  $BM = \sqrt{2}BD$

$$\therefore \sqrt{2}BM = 2BD = 2|x| = -2x.$$

$$h = PM + NM + \sqrt{2}BM = (y_P - y_M) + (y_N - y_M) + 2|x| = y_P - y_M + y_N - y_M - 2x$$

$$= \left[ -\frac{1}{2}x^2 - 4x - 6 - (-x - 6) \right] + \left[ -\frac{1}{2}x^2 + 6 - (-x - 6) \right] + (-2x)$$

$$= -x^2 - 6x + 12$$

$$\therefore h = -(x+3)^2 + 21$$

当  $x = -3$  时， $h$  的最大值为 21

$$\because -5 \leq x \leq -2$$

$$\therefore \text{当 } x = -5 \text{ 时, } h = -(-5+3)^2 + 21 = 17$$

$$\text{当 } x = -2 \text{ 时, } h = -(-2+3)^2 + 21 = 20$$

$\therefore h$  的取值范围是：17  $\leq$   $h$   $\leq$  21

**【点评】** 本题考查二次函数综合题，解（1）的关键是利用旋转的性质得出 C，E 的坐标，又利用了待定系数法；解（2）①的关键是利用解方程组，要分类讨论，以防遗漏；解（2）②的关键是利用平行于 y 轴直线上两点间的距离是较大的纵坐标减较小的纵坐标得出二次函数，又利用了二次函数的性质。

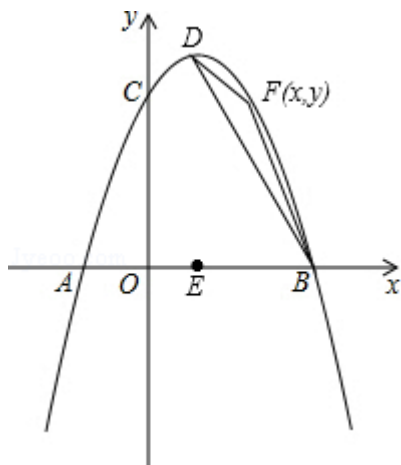
41. 如图，抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  与两坐标轴相交于点 A（-1，0）、B（3，0）、C（0，3），D 是抛物线的顶点，E 是线段 AB 的中点。

（1）求抛物线的解析式，并写出 D 点的坐标；

（2）F（x，y）是抛物线上的动点：

①当  $x > 1$ ， $y > 0$  时，求  $\triangle BDF$  的面积的最大值；

②当 $\angle AEF = \angle DBE$ 时，求点F的坐标.



**【分析】**(1) 根据点 A、B、C 的坐标，利用待定系数法即可求出抛物线的解析式，再利用配方法即可求出抛物线顶点 D 的坐标；

(2) ①过点 F 作  $FM \parallel y$  轴，交 BD 于点 M，根据点 B、D 的坐标，利用待定系数法可求出直线 BD 的解析式，根据点 F 的坐标可得出点 M 的坐标，利用三角形的面积公式可得出  $S_{\triangle BDF} = -x^2 + 4x - 3$ ，再利用二次函数的性质即可解决最值问题；

②过点 E 作  $EN \parallel BD$  交 y 轴于点 N，交抛物线于点  $F_1$ ，在 y 轴负半轴取  $ON' = ON$ ，连接  $EN'$ ，射线  $EN'$  交抛物线于点  $F_2$ ，则  $\angle AEF_1 = \angle DBE$ 、 $\angle AEF_2 = \angle DBE$ ，根据  $EN \parallel BD$  结合点 E 的坐标可求出直线  $EF_1$  的解析式，联立直线  $EF_1$ 、抛物线的解析式成方程组，通过解方程组即可求出点  $F_1$  的坐标，同理可求出点  $F_2$  的坐标，此题得解.

**【解答】**解：(1) 将 A(-1, 0)、B(3, 0)、C(0, 3) 代入  $y = ax^2 + bx + c$ ,

$$\begin{cases} a - b + c = 0 \\ 9a + 3b + c = 0 \\ c = 3 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = 3 \end{cases},$$

$\therefore$  抛物线的解析式为  $y = -x^2 + 2x + 3$ .

$$\because y = -x^2 + 2x + 3 = -(x - 1)^2 + 4,$$

$\therefore$  顶点 D 的坐标为 (1, 4).

(2) ①过点 F 作  $FM \parallel y$  轴，交 BD 于点 M，如图 1 所示.

设直线 BD 的解析式为  $y = mx + n$  ( $m \neq 0$ ),

将 (3, 0)、(1, 4) 代入  $y = mx + n$ ,

$$\begin{cases} 3m + n = 0 \\ m + n = 4 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} m = -2 \\ n = 6 \end{cases},$$

∴直线 BD 的解析式为  $y = -2x + 6$ .

∴点 F 的坐标为  $(x, -x^2 + 2x + 3)$ ,

∴点 M 的坐标为  $(x, -2x + 6)$ ,

∴ $FM = -x^2 + 2x + 3 - (-2x + 6) = -x^2 + 4x - 3$ ,

∴ $S_{\triangle BDF} = \frac{1}{2} FM \cdot (y_B - y_D) = -x^2 + 4x - 3 = -(x - 2)^2 + 1$ .

∴ $-1 < 0$ ,

∴当  $x = 2$  时,  $S_{\triangle BDF}$  取最大值, 最大值为 1.

②过点 E 作  $EN \parallel BD$  交  $y$  轴于点 N, 交抛物线于点  $F_1$ , 在  $y$  轴负半轴取  $ON' = ON$ , 连接  $EN'$ , 射线  $EN'$  交抛物线于点  $F_2$ , 如图 2 所示.

∴ $EF_1 \parallel BD$ ,

∴ $\angle AEF_1 = \angle DBE$ .

∴ $ON = ON'$ ,  $EO \perp NN'$ ,

∴ $\angle AEF_2 = \angle AEF_1 = \angle DBE$ .

∴E 是线段 AB 的中点,  $A(-1, 0)$ ,  $B(3, 0)$ ,

∴点 E 的坐标为  $(1, 0)$ .

设直线  $EF_1$  的解析式为  $y = -2x + b_1$ ,

将  $E(1, 0)$  代入  $y = -2x + b_1$ ,

$-2 + b_1 = 0$ , 解得:  $b_1 = 2$ ,

∴直线  $EF_1$  的解析式为  $y = -2x + 2$ .

联立直线  $EF_1$ 、抛物线解析式成方程组, 
$$\begin{cases} y = -2x + 2 \\ y = -x^2 + 2x + 3 \end{cases},$$

解得:  $\begin{cases} x_1 = 2 - \sqrt{5} \\ y_1 = 2\sqrt{5} - 2 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = 2 + \sqrt{5} \\ y_2 = -2\sqrt{5} - 2 \end{cases}$  (舍去),

∴点  $F_1$  的坐标为  $(2 - \sqrt{5}, 2\sqrt{5} - 2)$ .

当  $x = 0$  时,  $y = -2x + 2 = 2$ ,

∴点 N 的坐标为  $(0, 2)$ ,

∴点  $N'$  的坐标为  $(0, -2)$ .

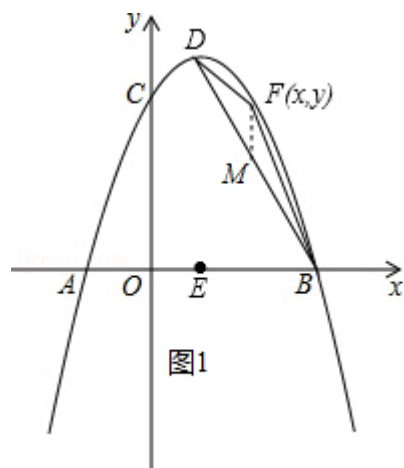
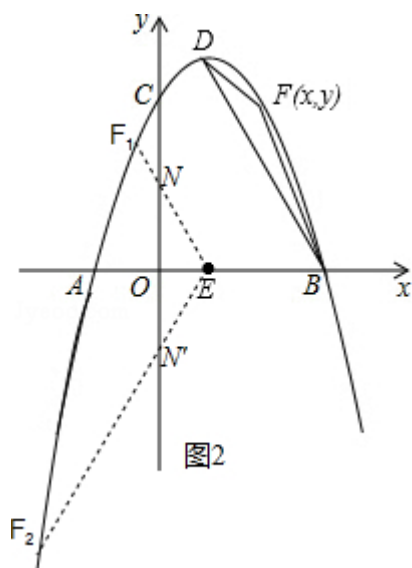
同理, 利用待定系数法可求出直线  $EF_2$  的解析式为  $y = 2x - 2$ .

联立直线  $EF_2$ 、抛物线解析式成方程组，
$$\begin{cases} y=2x-2 \\ y=-x^2+2x+3 \end{cases},$$

解得：
$$\begin{cases} x_1=-\sqrt{5} \\ y_2=-2\sqrt{5}-2 \end{cases}, \begin{cases} x_2=\sqrt{5} \\ y_2=2\sqrt{5}-2 \end{cases} \text{ (舍去),}$$

$\therefore$  点  $F_2$  的坐标为  $(-\sqrt{5}, -2\sqrt{5}-2)$ .

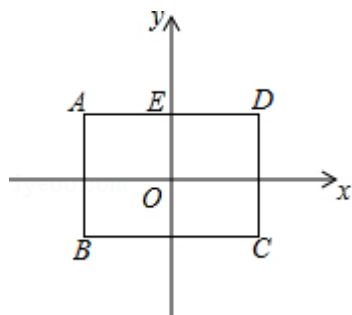
综上所述：当  $\angle AEF = \angle DBE$  时，点  $F$  的坐标为  $(2-\sqrt{5}, 2\sqrt{5}-2)$  或  $(-\sqrt{5}, -2\sqrt{5}-2)$ .



**【点评】** 本题考查了待定系数法求二次（一次）函数解析式、三角形的面积、平行线的性质以及二次函数的最值，解题的关键是：（1）根据点的坐标，利用待定系数法求出抛物线解析式；（2）①根据三角形的面积公式找出  $S_{\triangle BDF} = -x^2 + 4x - 3$ ；②联立直线与抛物线的解析式成方程组，通过解方程组求出点  $F$  的坐标.

42. 如图，在平面直角坐标系中，矩形 ABCD 的对称中心为坐标原点 O，AD ⊥ y 轴于点 E（点 A 在点 D 的左侧），经过 E、D 两点的函数  $y = -\frac{1}{2}x^2 + mx + 1$  ( $x \geq 0$ ) 的图象记为  $G_1$ ，函数  $y = -\frac{1}{2}x^2 - mx - 1$  ( $x < 0$ ) 的图象记为  $G_2$ ，其中  $m$  是常数，图象  $G_1$ 、 $G_2$  合起来得到的图象记为  $G$ 。设矩形 ABCD 的周长为  $L$ 。

- (1) 当点 A 的横坐标为 -1 时，求  $m$  的值；
- (2) 求  $L$  与  $m$  之间的函数关系式；
- (3) 当  $G_2$  与矩形 ABCD 恰好有两个公共点时，求  $L$  的值；
- (4) 设  $G$  在  $-4 \leq x \leq 2$  上最高点的纵坐标为  $y_0$ ，当  $\frac{3}{2} \leq y_0 \leq 9$  时，直接写出  $L$  的取值范围。



**【分析】** (1) 求出点 B 坐标利用待定系数法即可解决问题；

(2) 利用对称轴公式，求出 BE 的长即可解决问题；

(3) 由  $G_2$  与矩形 ABCD 恰好有两个公共点，推出抛物线  $G_2$  的顶点  $M(-m, \frac{1}{2}m^2 - 1)$  在线段 AE 上，利用待定系数法即可解决问题；

(4) 分三种情形讨论求解即可；

**【解答】** 解：(1) 由题意  $E(0, 1)$ ， $A(-1, 1)$ ， $D(1, 1)$

把  $D(1, 1)$  代入  $y = -\frac{1}{2}x^2 + mx + 1$  中，得到  $1 = -\frac{1}{2} + m + 1$ ，

$$\therefore m = \frac{1}{2}.$$

(2)  $\because$  抛物线  $G_1$  的对称轴  $x = -\frac{m}{-1} = m$ ，

$$\therefore AE = ED = 2m,$$

$\because$  矩形 ABCD 的对称中心为坐标原点 O，

$$\therefore AD = BC = 4m, AB = CD = 2,$$

$$\therefore L=8m+4.$$

(3)  $\because$  当  $G_2$  与矩形 ABCD 恰好有两个公共点,

$\therefore$  抛物线  $G_2$  的顶点  $M(-m, \frac{1}{2}m^2 - 1)$  在线段 AE 上,

$$\therefore \frac{1}{2}m^2 - 1 = 1,$$

$\therefore m=2$  或  $-2$  (舍弃),

$$\therefore L=8 \times 2 + 4 = 20.$$

(4)  $G_1$  的顶点  $(m, \frac{1}{2}m^2 + 1)$ ,  $G_1$  中  $(2, 2m - 1)$ ,  $G_2$  顶点  $(-m, \frac{1}{2}m^2 - 1)$ ,

$G_2$  中  $(-4, 4m - 9)$ .

① 当  $m \leq 2$ , 最高点是抛物线  $G_1$  的顶点  $N(m, \frac{1}{2}m^2 + 1)$  时,

若  $\frac{1}{2}m^2 + 1 = \frac{3}{2}$ , 解得  $m=1$  或  $-1$  (舍弃),

若  $\frac{1}{2}m^2 + 1 = 9$  时,  $m=4$  或  $-4$  (舍弃),

又  $\because m \leq 2$ ,

观察图象可知满足条件的  $m$  的值为  $1 \leq m \leq 2$ ,

②  $2 < m \leq 4$  时, 当  $(2, 2m - 1)$  是最高点时, 
$$\begin{cases} \frac{3}{2} \leq 2m - 1 \leq 9 \\ 2m - 1 > \frac{1}{2}m^2 - 1 \end{cases},$$

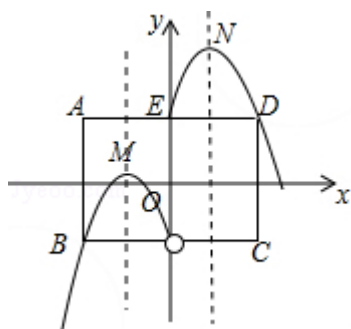
解得  $2 < m \leq 4$ ,

③ 当  $m > 4$  时, 
$$\begin{cases} \frac{3}{2} \leq 4m - 9 \leq 9 \\ 4m - 9 > 2m - 1 \end{cases},$$

解得  $4 < m \leq \frac{9}{2}$ ,

综上所述,  $1 \leq m \leq \frac{9}{2}$ ,

$$\therefore 12 \leq L \leq 40.$$



**【点评】** 本题考查二次函数综合题、矩形的性质、待定系数法、不等式组等知识，解题的关键是理解题意，灵活运用所学知识解决问题，学会用分类讨论的思想思考问题，学会利用数形结合的思想解决问题，属于中考压轴题。

43. 已知抛物线  $y=ax^2+bx+c$  过点  $A(0, 2)$ ，且抛物线上任意不同两点  $M(x_1, y_1)$ ， $N(x_2, y_2)$  都满足：当  $x_1 < x_2 < 0$  时， $(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) > 0$ ；当  $0 < x_1 < x_2$  时， $(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) < 0$ 。以原点  $O$  为圆心， $OA$  为半径的圆与抛物线的另两个交点为  $B$ ， $C$ ，且  $B$  在  $C$  的左侧， $\triangle ABC$  有一个内角为  $60^\circ$ 。

(1) 求抛物线的解析式；

(2) 若  $MN$  与直线  $y = -2\sqrt{3}x$  平行，且  $M$ ， $N$  位于直线  $BC$  的两侧， $y_1 > y_2$ ，解决以下问题：

①求证： $BC$  平分  $\angle MBN$ ；

②求  $\triangle MBC$  外心的纵坐标的取值范围。

**【分析】** (1) 由  $A$  的坐标确定出  $c$  的值，根据已知不等式判断出  $y_1 - y_2 < 0$ ，可得出抛物线的增减性，确定出抛物线对称轴为  $y$  轴，且开口向下，求出  $b$  的值，如图 1 所示，可得三角形  $ABC$  为等边三角形，确定出  $B$  的坐标，代入抛物线解析式即可；

(2) ①设出点  $M(x_1, -x_1^2+2)$ ， $N(x_2, -x_2^2+2)$ ，由  $MN$  与已知直线平行，得到  $k$  值相同，表示出直线  $MN$  解析式，进而表示出  $ME$ ， $BE$ ， $NF$ ， $BF$ ，求出  $\tan \angle MBE$  与  $\tan \angle NBF$  的值相等，进而得到  $BC$  为角平分线；

②三角形的外心即为三条垂直平分线的交点，得到  $y$  轴为  $BC$  的垂直平分线，设  $P$  为外心，利用勾股定理化简  $PB^2=PM^2$ ，确定出  $\triangle MBC$  外心的纵坐标的取值范围即可。

**【解答】** 解：(1)  $\because$  抛物线过点  $A(0, 2)$ ，

∴  $c=2$ ,

当  $x_1 < x_2 < 0$  时,  $x_1 - x_2 < 0$ , 由  $(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) > 0$ , 得到  $y_1 - y_2 < 0$ ,

∴ 当  $x < 0$  时,  $y$  随  $x$  的增大而增大,

同理当  $x > 0$  时,  $y$  随  $x$  的增大而减小,

∴ 抛物线的对称轴为  $y$  轴, 且开口向下, 即  $b=0$ ,

∴ 以  $O$  为圆心,  $OA$  为半径的圆与抛物线交于另两点  $B, C$ , 如图 1 所示,

∴  $\triangle ABC$  为等腰三角形,

∴  $\triangle ABC$  中有一个角为  $60^\circ$ ,

∴  $\triangle ABC$  为等边三角形, 且  $OC=OA=2$ ,

设线段  $BC$  与  $y$  轴的交点为点  $D$ , 则有  $BD=CD$ , 且  $\angle OBD=30^\circ$ ,

∴  $BD=OB \cdot \cos 30^\circ = \sqrt{3}$ ,  $OD=OB \cdot \sin 30^\circ = 1$ ,

∴  $B$  在  $C$  的左侧,

∴  $B$  的坐标为  $(-\sqrt{3}, -1)$ ,

∴  $B$  点在抛物线上, 且  $c=2, b=0$ ,

∴  $3a+2=-1$ ,

解得:  $a=-1$ ,

则抛物线解析式为  $y=-x^2+2$ ;

(2) ①由 (1) 知, 点  $M(x_1, -x_1^2+2)$ ,  $N(x_2, -x_2^2+2)$ ,

∴  $MN$  与直线  $y=-2\sqrt{3}x$  平行,

∴ 设直线  $MN$  的解析式为  $y=-2\sqrt{3}x+m$ , 则有  $-x_1^2+2=-2\sqrt{3}x_1+m$ , 即  $m=-x_1^2+2\sqrt{3}x_1+2$ ,

∴ 直线  $MN$  解析式为  $y=-2\sqrt{3}x-x_1^2+2\sqrt{3}x_1+2$ ,

把  $y=-2\sqrt{3}x-x_1^2+2\sqrt{3}x_1+2$  代入  $y=-x^2+2$ , 解得:  $x=x_1$  或  $x=2\sqrt{3}-x_1$ ,

∴  $x_2=2\sqrt{3}-x_1$ , 即  $y_2=-(2\sqrt{3}-x_1)^2+2=-x_1^2+4\sqrt{3}x_1-10$ ,

作  $ME \perp BC$ ,  $NF \perp BC$ , 垂足为  $E, F$ , 如图 2 所示,

∴  $M, N$  位于直线  $BC$  的两侧, 且  $y_1 > y_2$ , 则  $y_2 < -1 < y_1 \leq 2$ , 且  $-\sqrt{3} < x_1 < x_2$ ,

∴  $ME=y_1-(-1)=-x_1^2+3$ ,  $BE=x_1-(-\sqrt{3})=x_1+\sqrt{3}$ ,  $NF=-1-y_2=x_1^2-4\sqrt{3}x_1+9$ ,

$BF=x_2-(-\sqrt{3})=3\sqrt{3}-x_1$ ,

在  $Rt\triangle BEM$  中,  $\tan \angle MBE = \frac{ME}{BE} = \frac{-x_1^2+3}{x_1+\sqrt{3}} = \sqrt{3}-x_1$ ,



在 Rt  $\triangle$  BFN 中，  $\tan \angle$

$$\tan \angle NBF = \frac{NF}{BF} = \frac{x_1^2 - 4\sqrt{3}x_1 + 9}{3\sqrt{3} - x_1} = \frac{(x_1 - 2\sqrt{3})^2 - 3}{3\sqrt{3} - x_1} = \frac{(x_1 - 3\sqrt{3})(x_1 - \sqrt{3})}{3\sqrt{3} - x_1} = \sqrt{3} - x_1,$$

$$\therefore \tan \angle MBE = \tan \angle NBF,$$

$$\therefore \angle MBE = \angle NBF,$$

则 BC 平分  $\angle MBN$ ;

②  $\because$  y 轴为 BC 的垂直平分线，

$\therefore$  设  $\triangle MBC$  的外心为 P (0,  $y_0$ )，则 PB=PM，即  $PB^2=PM^2$ ，

根据勾股定理得：  $3 + (y_0 + 1)^2 = x_1^2 + (y_0 - y_1)^2$ ，

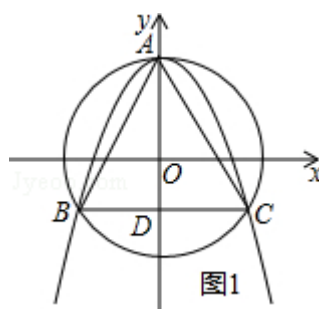
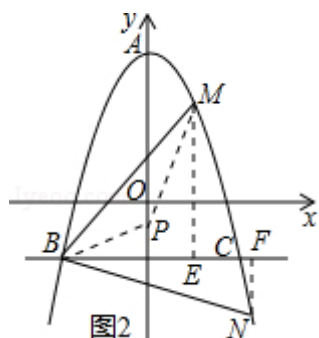
$$\therefore x_1^2 = 2 - y_1,$$

$$\therefore y_0^2 + 2y_0 + 4 = (2 - y_1) + (y_0 - y_1)^2, \text{ 即 } y_0 = \frac{1}{2}y_1 - 1,$$

由①得：  $-1 < y_1 \leq 2$ ，

$$\therefore -\frac{3}{2} < y_0 \leq 0,$$

则  $\triangle MBC$  的外心的纵坐标的取值范围是  $-\frac{3}{2} < y_0 \leq 0$ .



**【点评】**此题属于二次函数综合题，涉及的知识有：待定系数法求二次函数解析式，二次函数的图象与性质，锐角三角函数定义，勾股定理，熟练掌握各自的性质是解本题的关键.

44. 如图，抛物线  $y=x^2+bx+c$  与  $x$  轴交于 A、B 两点，B 点坐标为 (4, 0)，与  $y$  轴交于点 C (0, 4).

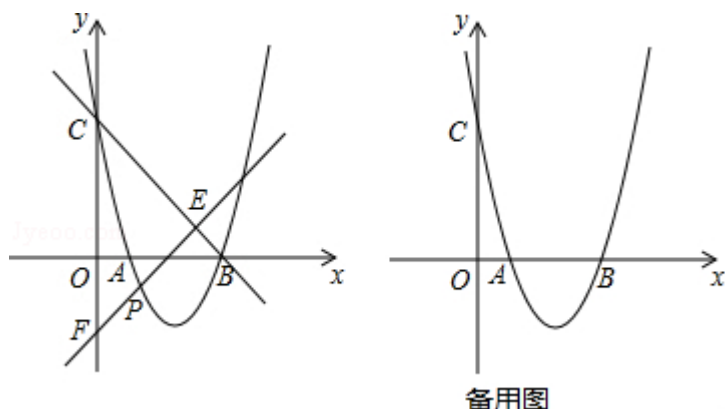
(1) 求抛物线的解析式；

(2) 点 P 在  $x$  轴下方的抛物线上，过点 P 的直线  $y=x+m$  与直线 BC 交于点 E，与  $y$  轴交于点 F，求 PE+EF 的最大值；

(3) 点 D 为抛物线对称轴上一点.

①当  $\triangle BCD$  是以 BC 为直角边的直角三角形时，直接写出点 D 的坐标；

②若  $\triangle BCD$  是锐角三角形，直接写出点 D 的纵坐标  $n$  的取值范围.



【分析】(1) 利用待定系数法求抛物线的解析式；

(2) 易得 BC 的解析式为  $y = -x+4$ ，先证明  $\triangle ECF$  为等腰直角三角形，作  $PH \perp y$  轴于 H， $PG \parallel y$  轴交 BC 于 G，如图 1，则  $\triangle EPG$  为等腰直角三角形， $PE = \frac{\sqrt{2}}{2}PG$ ，设  $P(t, t^2 - 4t + 3)$  ( $1 < t < 3$ )，则  $G(t, -t+3)$ ，接着利用  $t$  表示 PF、PE，所以  $PE+EF=2PE+PF = -\sqrt{2}t^2 + 5\sqrt{2}t$ ，然后利用二次函数的性质解决问题；

(3) ①如图 2，抛物线的对称轴为直线  $x = \frac{5}{2}$ ，点 D 的纵坐标的取值范围.

②由于  $\triangle BCD$  是以 BC 为斜边的直角三角形有  $4 + (y-3)^2 + 1 + y^2 = 18$ ，解得  $y_1 = \frac{4+\sqrt{31}}{2}$ ， $y_2 = \frac{4-\sqrt{31}}{2}$ ，得到此时 D 点坐标为  $(\frac{5}{2}, \frac{4+\sqrt{31}}{2})$  或  $(\frac{5}{2}, \frac{4-\sqrt{31}}{2})$ ，然后结合图形可确定  $\triangle BCD$  是锐角三角形时点 D 的纵坐标的取值范围.

【解答】解：(1) 把 B (4, 0)，C (0, 4) 代入  $y=x^2+bx+c$ ，得

$$\begin{cases} 16+4b+c=0 \\ c=4 \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} b=-5 \\ c=4 \end{cases}$$

$\therefore$  抛物线的解析式为  $y=x^2 - 5x+4$ ；

(2) 易得 BC 的解析式为  $y = -x + 4$ ,

$\because$  直线  $y = x + m$  与直线  $y = x$  平行,

$\therefore$  直线  $y = -x + 4$  与直线  $y = x + m$  垂直,

$\therefore \angle CEF = 90^\circ$ ,

$\therefore \triangle ECF$  为等腰直角三角形,

作  $PH \perp y$  轴于 H,  $PG \parallel y$  轴交 BC 于 G, 如图 1,  $\triangle EPG$  为等腰直角三角形,  $PE = \frac{\sqrt{2}}{2} PG$ ,

设  $P(t, t^2 - 5t + 4)$  ( $1 < t < 4$ ), 则  $G(t, -t + 4)$ ,

$\therefore PF = \sqrt{2} PH = \sqrt{2} t$ ,  $PG = -t + 4 - (t^2 - 5t + 4) = -t^2 + 4t$ ,

$\therefore PE = \frac{\sqrt{2}}{2} PG = -\frac{\sqrt{2}}{2} t^2 + 2\sqrt{2} t$ ,

$\therefore PE + EF = PE + PE + PF = 2PE + PF = -\sqrt{2} t^2 + 4\sqrt{2} t + \sqrt{2} t = -\sqrt{2} t^2 + 5\sqrt{2} t = -\sqrt{2} \left(t - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{25\sqrt{2}}{4}$ ,

当  $t = \frac{5}{2}$  时,  $PE + EF$  的最大值为  $\frac{25\sqrt{2}}{4}$ ;

(3) ①如图 2, 抛物线的对称轴为直线  $x = \frac{5}{2}$ ,

设  $D\left(\frac{5}{2}, y\right)$ , 则  $BC^2 = 4^2 + 4^2 = 32$ ,  $DC^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + (y - 4)^2$ ,  $BD^2 = \left(4 - \frac{5}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{4} + y^2$ ,

当  $\triangle BCD$  是以 BC 为直角边, BD 为斜边的直角三角形时,  $BC^2 + DC^2 = BD^2$ , 即  $32 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + (y - 4)^2 = \frac{9}{4} + y^2$ , 解得  $y = 5$ , 此时 D 点坐标为  $\left(\frac{5}{2}, \frac{13}{2}\right)$ ;

当  $\triangle BCD$  是以 BC 为直角边, CD 为斜边的直角三角形时,  $BC^2 + DB^2 = DC^2$ , 即  $32 + \frac{9}{4} + y^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + (y - 4)^2$ , 解得  $y = -1$ , 此时 D 点坐标为  $\left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ ;

综上所述, 符合条件的点 D 的坐标是  $\left(\frac{5}{2}, \frac{13}{2}\right)$  或  $\left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ ;

②当  $\triangle BCD$  是以 BC 为斜边的直角三角形时,  $DC^2 + DB^2 = BC^2$ , 即  $\left(\frac{5}{2}\right)^2 + (y - 4)^2 + \frac{9}{4} + y^2 = 32$ , 解得  $y_1 = \frac{4 + \sqrt{31}}{2}$ ,  $y_2 = \frac{4 - \sqrt{31}}{2}$ , 此时 D 点坐标为  $\left(\frac{5}{2}, \frac{4 + \sqrt{31}}{2}\right)$  或  $\left(\frac{5}{2}, \frac{4 - \sqrt{31}}{2}\right)$ ,

所以  $\triangle BCD$  是锐角三角形, 点 D 的纵坐标的取值范围为  $\frac{4 + \sqrt{31}}{2} < y < \frac{13}{2}$  或  $-\frac{3}{2} < y < \frac{4 - \sqrt{31}}{2}$ .

$$y < \frac{4 - \sqrt{31}}{2}.$$

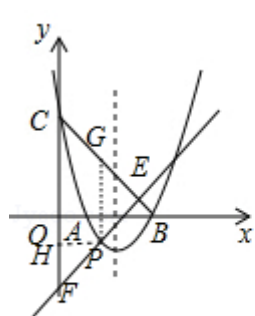


图1

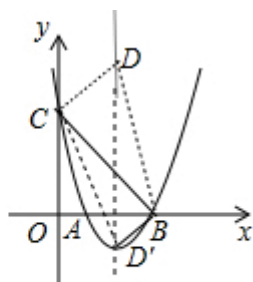


图2

**【点评】** 本题考查了二次函数的综合题：熟练掌握等腰直角三角形的性质、二次函数图象上点的坐标特征和二次函数的性质；会利用待定系数法求函数解析式；会利用两点间的距离公式计算线段的长；理解坐标与图形的性质；会运用分类讨论的思想和数形结合的思想解决数学问题.

45. 如图 1，抛物线  $y = ax^2 + 2x + c$  与  $x$  轴交于  $A(-4, 0)$ ， $B(1, 0)$  两点，过点  $B$  的直线  $y = kx + \frac{2}{3}$  分别与  $y$  轴及抛物线交于点  $C$ ， $D$ 。

(1) 求直线和抛物线的表达式；

(2) 动点  $P$  从点  $O$  出发，在  $x$  轴的负半轴上以每秒 1 个单位长度的速度向左匀速运动，设运动时间为  $t$  秒，当  $t$  为何值时， $\triangle PDC$  为直角三角形？请直接写出所有满足条件的  $t$  的值；

(3) 如图 2，将直线  $BD$  沿  $y$  轴向下平移 4 个单位后，与  $x$  轴， $y$  轴分别交于  $E$ ， $F$  两点，在抛物线的对称轴上是否存在点  $M$ ，在直线  $EF$  上是否存在点  $N$ ，使  $DM + MN$  的值最小？若存在，求出其最小值及点  $M$ ， $N$  的坐标；若不存在，请说明理由。

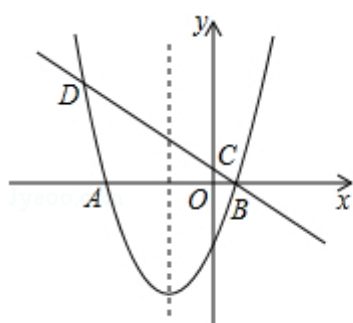


图1

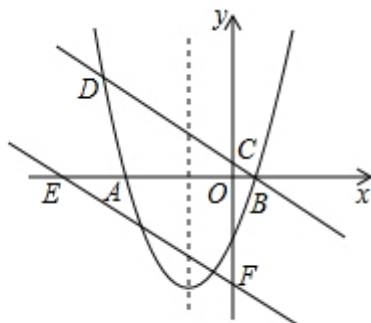


图2

【分析】(1) 利用待定系数法求解可得；

(2) 先求得点 D 的坐标，过点 D 分别作  $DE \perp x$  轴、 $DF \perp y$  轴，分  $P_1D \perp P_1C$ 、 $P_2D \perp DC$ 、 $P_3C \perp DC$  三种情况，利用相似三角形的性质逐一求解可得；

(3) 通过作对称点，将折线转化成两点间距离，应用两点之间线段最短．

【解答】解：(1) 把  $A(-4, 0)$ ， $B(1, 0)$  代入  $y = ax^2 + 2x + c$ ，得

$$\begin{cases} 16a - 8 + c = 0 \\ a + 2 + c = 0 \end{cases},$$

$$\text{解得：} \begin{cases} a = -\frac{2}{3} \\ c = -\frac{8}{3} \end{cases},$$

$$\therefore \text{抛物线解析式为：} y = -\frac{2}{3}x^2 + 2x - \frac{8}{3},$$

$$\therefore \text{过点 B 的直线 } y = kx + \frac{2}{3},$$

$$\therefore \text{代入 } (1, 0), \text{ 得：} k = -\frac{2}{3},$$

$$\therefore \text{BD 解析式为 } y = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3};$$

$$(2) \text{ 由 } \begin{cases} y = -\frac{2}{3}x^2 + 2x - \frac{8}{3} \\ y = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3} \end{cases} \text{ 得交点坐标为 } D(-5, 4),$$

如图 1，过 D 作  $DE \perp x$  轴于点 E，作  $DF \perp y$  轴于点 F，

当  $P_1D \perp P_1C$  时， $\triangle P_1DC$  为直角三角形，

则  $\triangle DEP_1 \sim \triangle P_1OC$ ，

$$\therefore \frac{DE}{PO} = \frac{PE}{OC}, \text{ 即 } \frac{4}{t} = \frac{5-t}{\frac{2}{3}},$$

$$\text{解得 } t = \frac{15 \pm \sqrt{129}}{6},$$



设点 N 坐标为  $(a, -\frac{2}{3}a - \frac{10}{3})$ ,

$$\therefore \frac{OE}{NH} = \frac{OF}{HD'}, \text{ 即 } \frac{5}{4 - (-\frac{2}{3}a - \frac{10}{3})} = \frac{\frac{10}{3}}{2-a},$$

解得:  $a = -2$ ,

则 N 点坐标为  $(-2, -2)$ ,

求得直线 ND' 的解析式为  $y = \frac{3}{2}x + 1$ ,

当  $x = -\frac{3}{2}$  时,  $y = -\frac{5}{4}$ ,

$\therefore$  M 点坐标为  $(-\frac{3}{2}, -\frac{5}{4})$ ,

此时, DM+MN 的值最小为  $\sqrt{D'H^2 + NH^2} = \sqrt{4^2 + 6^2} = 2\sqrt{13}$ .

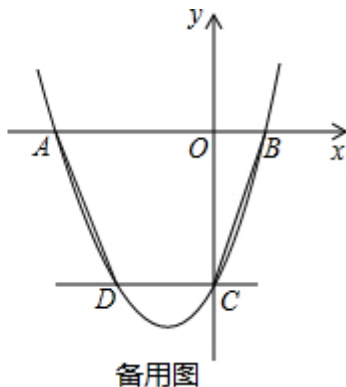
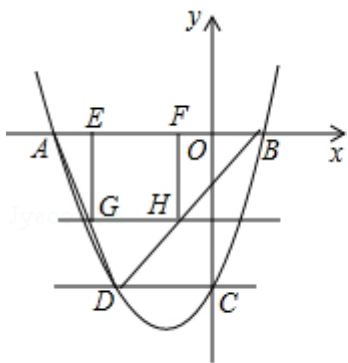
**【点评】** 本题是二次函数和几何问题综合题, 应用了二次函数性质以及转化的数学思想、分类讨论思想. 解题时注意数形结合.

46. 如图, 已知抛物线  $y = ax^2 + bx - 3$  与 x 轴交于点 A  $(-3, 0)$  和点 B  $(1, 0)$ , 交 y 轴于点 C, 过点 C 作  $CD \parallel x$  轴, 交抛物线于点 D.

(1) 求抛物线的解析式;

(2) 若直线  $y = m$   $(-3 < m < 0)$  与线段 AD、BD 分别交于 G、H 两点, 过 G 点作  $EG \perp x$  轴于点 E, 过点 H 作  $HF \perp x$  轴于点 F, 求矩形 GEFH 的最大面积;

(3) 若直线  $y = kx + 1$  将四边形 ABCD 分成左、右两个部分, 面积分别为  $S_1, S_2$ , 且  $S_1 : S_2 = 4 : 5$ , 求 k 的值.



**【分析】** (1) 利用待定系数法即可得出结论;

(2) 方法 1、先利用待定系数法求出直线 AD, BD 的解析式, 进而求出 G, H 的坐标, 进而求出 GH, 即可得出结论;

方法 2、利用相似三角形的对应边上的高的比等于相似比, 即可求出 GH, 即可得出结论;

(3) 先求出四边形 ADNM 的面积, 再求出直线  $y=kx+1$  与线段 CD, AB 的交点坐标, 即可得出结论.

**【解答】**解: (1)  $\because$  抛物线  $y=ax^2+bx-3$  与  $x$  轴交于点 A  $(-3, 0)$  和点 B  $(1, 0)$ ,

$$\therefore \begin{cases} 9a-3b-3=0, \\ a+b-3=0 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} a=1, \\ b=2 \end{cases},$$

$\therefore$  抛物线的解析式为  $y=x^2+2x-3$ ;

(2) 方法 1、由 (1) 知, 抛物线的解析式为  $y=x^2+2x-3$ ,

$$\therefore C(0, -3),$$

$$\therefore x^2+2x-3=-3,$$

$$\therefore x=0 \text{ 或 } x=-2,$$

$$\therefore D(-2, -3),$$

$\because$  A  $(-3, 0)$  和点 B  $(1, 0)$ ,

$\therefore$  直线 AD 的解析式为  $y=-3x-9$ , 直线 BD 的解析式为  $y=x-1$ ,

$\because$  直线  $y=m$   $(-3 < m < 0)$  与线段 AD、BD 分别交于 G、H 两点,

$$\therefore G\left(-\frac{1}{3}m-3, m\right), H(m+1, m),$$

$$\therefore GH=m+1-\left(-\frac{1}{3}m-3\right)=\frac{4}{3}m+4,$$

$$\therefore S_{\text{矩形 GEFH}}=-m\left(\frac{4}{3}m+4\right)=-\frac{4}{3}(m^2+3m)=-\frac{4}{3}\left(m+\frac{3}{2}\right)^2+3,$$

$$\therefore m=-\frac{3}{2}, \text{ 矩形 GEFH 的最大面积为 } 3.$$

方法 2、由 (1) 知, 抛物线的解析式为  $y=x^2+2x-3$ ,

$$\therefore C(0, -3),$$

$$\therefore x^2+2x-3=-3,$$



$$\therefore x=0 \text{ 或 } x=-2,$$

$$\therefore D(-2, -3),$$

$$\because A(-3, 0) \text{ 和点 } B(1, 0),$$

如图 1, 过点 D 作  $DM \perp x$  轴于 M, 交 GH 于 N,

$$\therefore DN=m-3,$$

$\because$  直线  $y=m$  ( $-3 < m < 0$ ) 与线段 AD、BD 分别交于 G、H 两点,

$$\therefore \triangle DGH \sim \triangle DAB,$$

$$\therefore \frac{DN}{DM} = \frac{GH}{AB},$$

$$\therefore \frac{m-3}{3} = \frac{GH}{4},$$

$$\therefore GH = \frac{4}{3}m + 4,$$

$$\therefore S_{\text{矩形 GEFH}} = -m \left( \frac{4}{3}m + 4 \right) = -\frac{4}{3}(m^2 + 3m) = -\frac{4}{3} \left( m + \frac{3}{2} \right)^2 + 3,$$

$$\therefore m = -\frac{3}{2}, \text{ 矩形 GEFH 的最大面积为 } 3.$$

$$(3) \because A(-3, 0), B(1, 0),$$

$$\therefore AB=4,$$

$$\because C(0, -3), D(-2, -3),$$

$$\therefore CD=2,$$

$$\therefore S_{\text{四边形 ABCD}} = \frac{1}{2} \times 3 \times (4+2) = 9,$$

$$\because S_1 : S_2 = 4 : 5,$$

$$\therefore S_1 = 4,$$

如图,

设直线  $y=kx+1$  与线段 AB 相交于 M, 与线段 CD 相交于 N,

$$\therefore M\left(-\frac{1}{k}, 0\right), N\left(-\frac{4}{k}, -3\right),$$

$$\therefore AM = -\frac{1}{k} + 3, DN = -\frac{4}{k} + 2,$$

$$\therefore S_1 = \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{k} + 3 - \frac{4}{k} + 2 \right) \times 3 = 4,$$

$$\therefore k = \frac{15}{7}$$

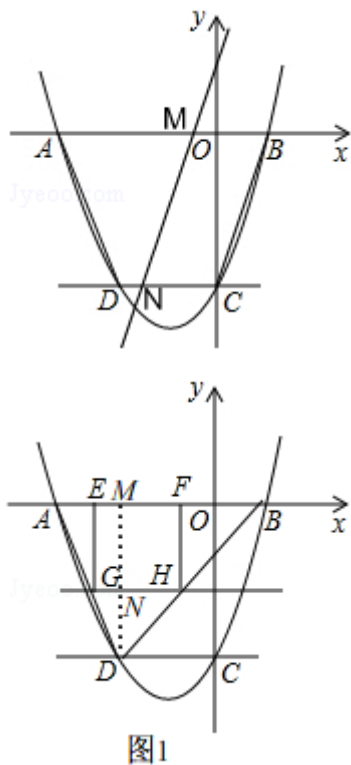


图1

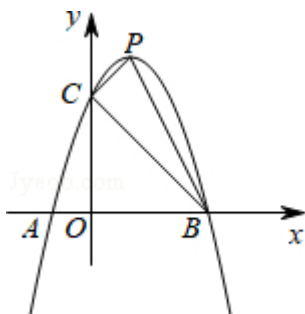
【点评】此题是二次函数综合题，主要考查了待定系数法，矩形的面积公式，梯形的面积公式，求出相关线段的长是解本题的关键．

47. 如图，抛物线顶点  $P(1, 4)$ ，与  $y$  轴交于点  $C(0, 3)$ ，与  $x$  轴交于点  $A, B$ ．

(1) 求抛物线的解析式．

(2)  $Q$  是抛物线上除点  $P$  外一点， $\triangle BCQ$  与  $\triangle BCP$  的面积相等，求点  $Q$  的坐标．

(3) 若  $M, N$  为抛物线上两个动点，分别过点  $M, N$  作直线  $BC$  的垂线段，垂足分别为  $D, E$ ．是否存在点  $M, N$  使四边形  $MNED$  为正方形？如果存在，求正方形  $MNED$  的边长；如果不存在，请说明理由．



【分析】(1) 设出抛物线顶点坐标，把  $C$  坐标代入求出即可；

(2) 由  $\triangle BCQ$  与  $\triangle BCP$  的面积相等，得到  $PQ$  与  $BC$  平行，①过  $P$  作  $PQ \parallel BC$ ，

交抛物线于点 Q，如图 1 所示；②设 G (1, 2)，可得 PG=GH=2，过 H 作直线 Q<sub>2</sub>Q<sub>3</sub> // BC，交 x 轴于点 H，分别求出 Q 的坐标即可；

(3) 存在点 M, N 使四边形 MNED 为正方形，如图 2 所示，过 M 作 MF // y 轴，过 N 作 NF // x 轴，过 N 作 NH // y 轴，则有 △MNF 与 △NEH 都为等腰直角三角形，设 M (x<sub>1</sub>, y<sub>1</sub>), N (x<sub>2</sub>, y<sub>2</sub>)，设直线 MN 解析式为 y = -x + b，与二次函数解析式联立，消去 y 得到关于 x 的一元二次方程，利用根与系数关系表示出 NF<sup>2</sup>，由 △MNF 为等腰直角三角形，得到 MN<sup>2</sup> = 2NF<sup>2</sup>，若四边形 MNED 为正方形，得到 NE<sup>2</sup> = MN<sup>2</sup>，求出 b 的值，进而确定出 MN 的长，即为正方形边长.

【解答】解：(1) 设  $y = a(x - 1)^2 + 4$  ( $a \neq 0$ ),

把 C (0, 3) 代入抛物线解析式得：a + 4 = 3，即 a = -1，

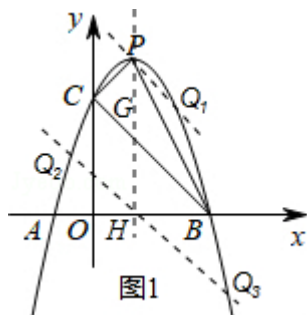
则抛物线解析式为  $y = -(x - 1)^2 + 4 = -x^2 + 2x + 3$ ；

(2) 由 B (3, 0), C (0, 3)，得到直线 BC 解析式为  $y = -x + 3$ ，

$$\because S_{\triangle PBC} = S_{\triangle QBC},$$

$$\therefore PQ \parallel BC,$$

①过 P 作 PQ // BC，交抛物线于点 Q，如图 1 所示，



$$\because P(1, 4), \therefore \text{直线 } PQ \text{ 解析式为 } y = -x + 5,$$

$$\text{联立得: } \begin{cases} y = -x + 5 \\ y = -x^2 + 2x + 3 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}, \text{ 即 } Q(2, 3);$$

②设 G (1, 2)， $\therefore PG = GH = 2$ ，

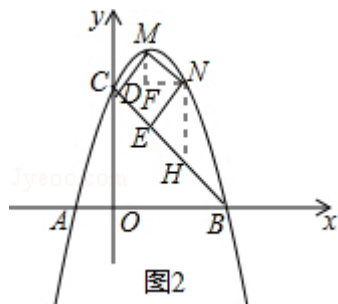
过 H 作直线 Q<sub>2</sub>Q<sub>3</sub> // BC，交 x 轴于点 H，则直线 Q<sub>2</sub>Q<sub>3</sub> 解析式为  $y = -x + 1$ ，

$$\text{联立得: } \begin{cases} y = -x + 1 \\ y = -x^2 + 2x + 3 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} x = \frac{3+\sqrt{17}}{2} \\ y = \frac{-1-\sqrt{17}}{2} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = \frac{3-\sqrt{17}}{2} \\ y = \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \end{cases},$$

$$\therefore Q_2 \left( \frac{3-\sqrt{17}}{2}, \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \right), Q_3 \left( \frac{3+\sqrt{17}}{2}, \frac{-1-\sqrt{17}}{2} \right);$$

(3) 存在点 M, N 使四边形 MNED 为正方形,



如图 2 所示, 过 M 作  $MF \parallel y$  轴, 过 N 作  $NF \parallel x$  轴, 过 N 作  $NH \parallel y$  轴, 则有  $\triangle MNF$  与  $\triangle NEH$  都为等腰直角三角形,

设  $M(x_1, y_1)$ ,  $N(x_2, y_2)$ , 设直线 MN 解析式为  $y = -x + b$ ,

$$\text{联立得: } \begin{cases} y = -x + b \\ y = -x^2 + 2x + 3 \end{cases},$$

消去 y 得:  $x^2 - 3x + b - 3 = 0$ ,

$$\therefore NF^2 = |x_1 - x_2|^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 21 - 4b,$$

$\because \triangle MNF$  为等腰直角三角形,

$$\therefore MN^2 = 2NF^2 = 42 - 8b,$$

$$\because NH^2 = (b - 3)^2, \therefore NF^2 = \frac{1}{2}(b - 3)^2,$$

若四边形 MNED 为正方形, 则有  $NE^2 = MN^2$ ,

$$\therefore 42 - 8b = \frac{1}{2}(b^2 - 6b + 9),$$

整理得:  $b^2 + 10b - 75 = 0$ ,

解得:  $b = -15$  或  $b = 5$ ,

$\because$  正方形边长为  $MN = \sqrt{42 - 8b}$ ,

$$\therefore MN = 9\sqrt{2} \text{ 或 } \sqrt{2}.$$

**【点评】**此题属于二次函数综合题, 涉及的知识有: 待定系数法确定函数解析式, 根与系数的关系, 等腰直角三角形的性质, 正方形的性质, 勾股定理, 以及一次

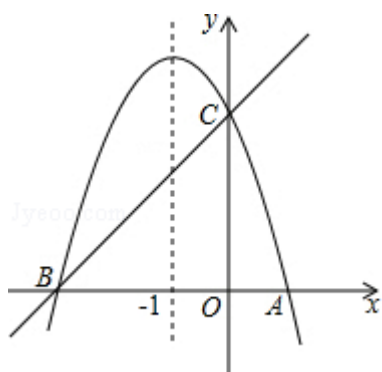
函数与二次函数的性质，熟练掌握待定系数法是解本题的关键．

48. 如图，已知抛物线  $y=ax^2+bx+c$  ( $a \neq 0$ ) 的对称轴为直线  $x=-1$ ，且抛物线与  $x$  轴交于 A、B 两点，与  $y$  轴交于 C 点，其中 A (1, 0)，C (0, 3)．

(1) 若直线  $y=mx+n$  经过 B、C 两点，求直线 BC 和抛物线的解析式；

(2) 在抛物线的对称轴  $x=-1$  上找一点 M，使点 M 到点 A 的距离与到点 C 的距离之和最小，求出点 M 的坐标；

(3) 设点 P 为抛物线的对称轴  $x=-1$  上的一个动点，求使  $\triangle BPC$  为直角三角形的点 P 的坐标．



**【分析】**(1) 先把点 A, C 的坐标分别代入抛物线解析式得到 a 和 b, c 的关系式，再根据抛物线的对称轴方程可得 a 和 b 的关系，再联立得到方程组，解方程组，求出 a, b, c 的值即可得到抛物线解析式；把 B、C 两点的坐标代入直线  $y=mx+n$ ，解方程组求出 m 和 n 的值即可得到直线解析式；

(2) 设直线 BC 与对称轴  $x=-1$  的交点为 M，则此时  $MA+MC$  的值最小．把  $x=-1$  代入直线  $y=x+3$  得 y 的值，即可求出点 M 坐标；

(3) 设 P (-1, t)，又因为 B (-3, 0)，C (0, 3)，所以可得  $BC^2=18$ ， $PB^2=(-1+3)^2+t^2=4+t^2$ ， $PC^2=(-1)^2+(t-3)^2=t^2-6t+10$ ，再分三种情况分别讨论求出符合题意 t 值即可求出点 P 的坐标．

**【解答】**解：(1) 依题意得：
 
$$\begin{cases} -\frac{b}{2a}=-1 \\ a+b+c=0 \\ c=3 \end{cases}$$

解之得：
 
$$\begin{cases} a=-1 \\ b=-2 \\ c=3 \end{cases}$$

$\therefore$  抛物线解析式为  $y=-x^2-2x+3$

∵对称轴为  $x = -1$ ，且抛物线经过  $A(1, 0)$ ，

∴把  $B(-3, 0)$ 、 $C(0, 3)$  分别代入直线  $y = mx + n$ ，

$$\text{得} \begin{cases} -3m + n = 0 \\ n = 3 \end{cases},$$

$$\text{解之得: } \begin{cases} m = 1 \\ n = 3 \end{cases},$$

∴直线  $y = mx + n$  的解析式为  $y = x + 3$ ；

(2) 设直线  $BC$  与对称轴  $x = -1$  的交点为  $M$ ，则此时  $MA + MC$  的值最小。

把  $x = -1$  代入直线  $y = x + 3$  得， $y = 2$ ，

∴ $M(-1, 2)$ ，

即当点  $M$  到点  $A$  的距离与到点  $C$  的距离之和最小时  $M$  的坐标为  $(-1, 2)$ ；

(3) 设  $P(-1, t)$ ，

又∵ $B(-3, 0)$ ， $C(0, 3)$ ，

$$\therefore BC^2 = 18, PB^2 = (-1+3)^2 + t^2 = 4 + t^2, PC^2 = (-1)^2 + (t-3)^2 = t^2 - 6t + 10,$$

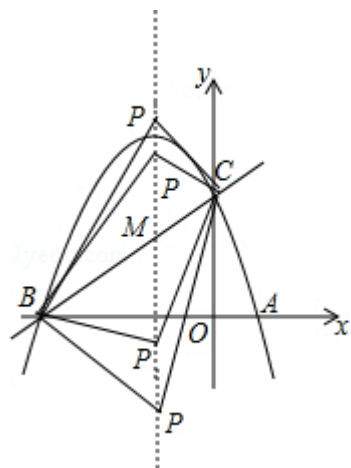
①若点  $B$  为直角顶点，则  $BC^2 + PB^2 = PC^2$  即：  $18 + 4 + t^2 = t^2 - 6t + 10$  解之得：  $t = -2$ ；

②若点  $C$  为直角顶点，则  $BC^2 + PC^2 = PB^2$  即：  $18 + t^2 - 6t + 10 = 4 + t^2$  解之得：  $t = 4$ ，

③若点  $P$  为直角顶点，则  $PB^2 + PC^2 = BC^2$  即：  $4 + t^2 + t^2 - 6t + 10 = 18$  解之得：  $t_1 = \frac{3 - \sqrt{17}}{2}$ ，

$$t_2 = \frac{3 + \sqrt{17}}{2};$$

综上所述  $P$  的坐标为  $(-1, -2)$  或  $(-1, 4)$  或  $(-1, \frac{3 + \sqrt{17}}{2})$  或  $(-1, \frac{3 - \sqrt{17}}{2})$ 。



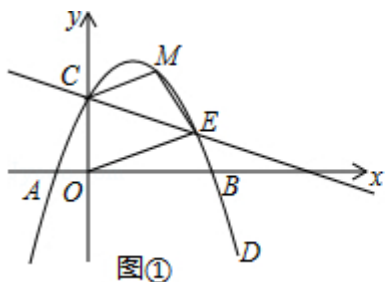
**【点评】** 本题综合考查了二次函数的图象与性质、待定系数法求函数（二次函数和一次函数）的解析式、利用轴对称性质确定线段的最小长度、难度不是很大，是一道不错的中考压轴题.

49. 在平面直角坐标系中，二次函数  $y=ax^2+\frac{5}{3}x+c$  的图象经过点  $C(0, 2)$  和点  $D(4, -2)$ . 点  $E$  是直线  $y=-\frac{1}{3}x+2$  与二次函数图象在第一象限内的交点.

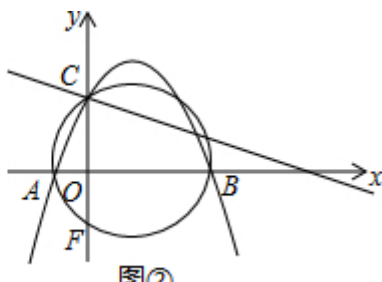
(1) 求二次函数的解析式及点  $E$  的坐标.

(2) 如图①，若点  $M$  是二次函数图象上的点，且在直线  $CE$  的上方，连接  $MC$ ,  $OE$ ,  $ME$ . 求四边形  $COEM$  面积的最大值及此时点  $M$  的坐标.

(3) 如图②，经过  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三点的圆交  $y$  轴于点  $F$ ，求点  $F$  的坐标.



图①



图②

**【分析】** (1) 把  $C$  与  $D$  坐标代入二次函数解析式求出  $a$  与  $c$  的值，确定出二次函数解析式，与一次函数解析式联立求出  $E$  坐标即可；

(2) 过  $M$  作  $MH$  垂直于  $x$  轴，与直线  $CE$  交于点  $H$ ，四边形  $COEM$  面积最大即为三角形  $CME$  面积最大，构造出二次函数求出最大值，并求出此时  $M$  坐标即可；

(3) 令  $y=0$ ，求出  $x$  的值，得出  $A$  与  $B$  坐标，由圆周角定理及相似的性质得到三角形  $AOC$  与三角形  $BOF$  相似，由相似得比例求出  $OF$  的长，即可确定出  $F$  坐标.

**【解答】** 解：(1) 把  $C(0, 2)$ ,  $D(4, -2)$  代入二次函数解析式得：
$$\begin{cases} 16a + \frac{20}{3} + c = -2, \\ c = 2 \end{cases}$$

解得：
$$\begin{cases} a = -\frac{2}{3}, \\ c = 2 \end{cases}$$
，即二次函数解析式为  $y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{5}{3}x + 2$ ,

联立一次函数解析式得：
$$\begin{cases} y = -\frac{1}{3}x + 2 \\ y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{5}{3}x + 2 \end{cases},$$

消去  $y$  得：
$$-\frac{1}{3}x + 2 = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{5}{3}x + 2,$$

解得：x=0 或 x=3，

则 E (3, 1)；

(2) 如图①，过 M 作 MH//y 轴，交 CE 于点 H，

设 M (m,  $-\frac{2}{3}m^2+\frac{5}{3}m+2$ )，则 H (m,  $-\frac{1}{3}m+2$ )，

$$\therefore MH = (-\frac{2}{3}m^2+\frac{5}{3}m+2) - (-\frac{1}{3}m+2) = -\frac{2}{3}m^2+2m,$$

$$S_{\text{四边形 COEM}} = S_{\triangle OCE} + S_{\triangle CME} = \frac{1}{2} \times 2 \times 3 + \frac{1}{2} MH \cdot 3 = -m^2+3m+3,$$

当  $m = -\frac{b}{a} = \frac{3}{2}$  时， $S_{\text{最大}} = \frac{21}{4}$ ，此时 M 坐标为  $(\frac{3}{2}, 3)$ ；

(3) 连接 BF，如图②所示，

$$\text{当 } -\frac{2}{3}x^2+\frac{5}{3}x+2=0 \text{ 时， } x_1=\frac{5+\sqrt{73}}{4}, x_2=\frac{5-\sqrt{73}}{4},$$

$$\therefore OA=\frac{\sqrt{73}-5}{4}, OB=\frac{\sqrt{73}+5}{4},$$

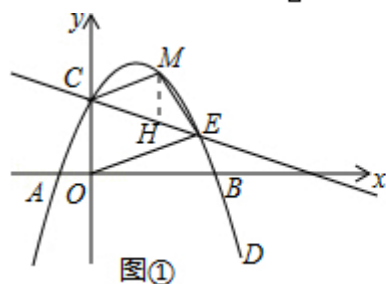
$$\because \angle ACO = \angle ABF, \angle AOC = \angle FOB,$$

$$\therefore \triangle AOC \sim \triangle FOB,$$

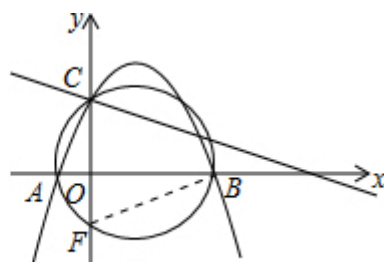
$$\therefore \frac{OA}{OF} = \frac{OC}{OB}, \text{ 即 } \frac{\frac{\sqrt{73}-5}{4}}{OF} = \frac{2}{\frac{\sqrt{73}+5}{4}},$$

$$\text{解得： } OF = \frac{3}{2},$$

则 F 坐标为  $(0, -\frac{3}{2})$ 。



图①



图②

**【点评】**此题属于二次函数综合题，涉及的知识有：待定系数法求二次函数解析式，相似三角形的判定与性质，三角形的面积，二次函数图象与性质，以及图形与坐标性质，熟练掌握各自的性质是解本题的关键。

50. 如图，抛物线  $y=a(x-1)(x-3)$  ( $a>0$ ) 与 x 轴交于 A、B 两点，抛物线

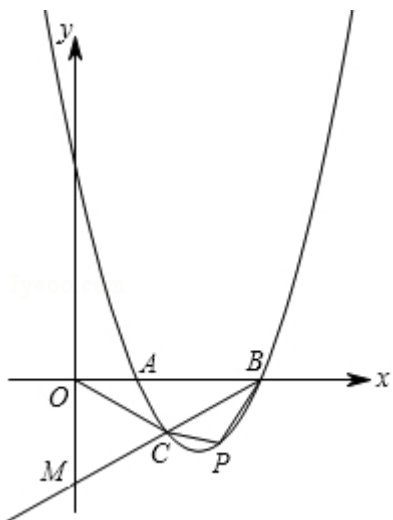


上另有一点  $C$  在  $x$  轴下方，且使  $\triangle OCA \sim \triangle OBC$ 。

(1) 求线段  $OC$  的长度；

(2) 设直线  $BC$  与  $y$  轴交于点  $M$ ，点  $C$  是  $BM$  的中点时，求直线  $BM$  和抛物线的解析式；

(3) 在 (2) 的条件下，直线  $BC$  下方抛物线上是否存在一点  $P$ ，使得四边形  $ABPC$  面积最大？若存在，请求出点  $P$  的坐标；若不存在，请说明理由。



**【分析】** (1) 令  $y=0$ ，求出  $x$  的值，确定出  $A$  与  $B$  坐标，根据已知相似三角形得比例，求出  $OC$  的长即可；

(2) 根据  $C$  为  $BM$  的中点，利用直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半得到  $OC=BC$ ，确定出  $C$  的坐标，利用待定系数法确定出直线  $BC$  解析式，把  $C$  坐标代入抛物线求出  $a$  的值，确定出二次函数解析式即可；

(3) 过  $P$  作  $x$  轴的垂线，交  $BM$  于点  $Q$ ，设出  $P$  与  $Q$  的横坐标为  $x$ ，分别代入抛物线与直线解析式，表示出坐标轴，相减表示出  $PQ$ ，四边形  $ACPB$  面积最大即为三角形  $BCP$  面积最大，三角形  $BCP$  面积等于  $PQ$  与  $B$  和  $C$  横坐标之差乘积的一半，构造为二次函数，利用二次函数性质求出此时  $P$  的坐标即可。

**【解答】** 解：(1) 由题可知当  $y=0$  时， $a(x-1)(x-3)=0$ ，

解得： $x_1=1$ ， $x_2=3$ ，即  $A(1, 0)$ ， $B(3, 0)$ ，

$$\therefore OA=1, OB=3$$

$$\because \triangle OCA \sim \triangle OBC,$$

$$\therefore OC:OB=OA:OC,$$

$$\therefore OC^2=OA \cdot OB=3,$$

则  $OC=\sqrt{3}$ ;

(2)  $\because C$  是  $BM$  的中点, 即  $OC$  为斜边  $BM$  的中线,

$\therefore OC=BC$ ,

$\therefore$  点  $C$  的横坐标为  $\frac{3}{2}$ ,

又  $OC=\sqrt{3}$ , 点  $C$  在  $x$  轴下方,

$\therefore C(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ ,

设直线  $BM$  的解析式为  $y=kx+b$ ,

把点  $B(3, 0)$ ,  $C(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$  代入得: 
$$\begin{cases} 3k+b=0 \\ \frac{3}{2}k+b=-\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases},$$

解得:  $b=-\sqrt{3}$ ,  $k=\frac{\sqrt{3}}{3}$ ,

$\therefore y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-\sqrt{3}$ ,

又  $\because$  点  $C(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$  在抛物线上, 代入抛物线解析式,

解得:  $a=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ,

$\therefore$  抛物线解析式为  $y=\frac{2\sqrt{3}}{3}x^2-\frac{8\sqrt{3}}{3}x+2\sqrt{3}$ ;

(3) 点  $P$  存在,

设点  $P$  坐标为  $(x, \frac{2\sqrt{3}}{3}x^2-\frac{8\sqrt{3}}{3}x+2\sqrt{3})$ , 过点  $P$  作  $PQ \perp x$  轴交直线  $BM$  于点  $Q$ ,

则  $Q(x, \frac{\sqrt{3}}{3}x-\sqrt{3})$ ,

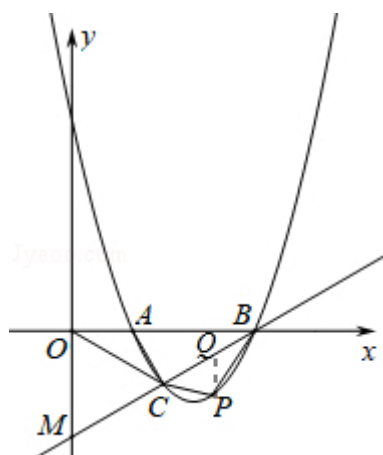
$\therefore PQ=\frac{\sqrt{3}}{3}x-\sqrt{3}-(\frac{2\sqrt{3}}{3}x^2-\frac{8\sqrt{3}}{3}x+2\sqrt{3})=-\frac{2\sqrt{3}}{3}x^2+3\sqrt{3}x-3\sqrt{3}$ ,

当  $\triangle BCP$  面积最大时, 四边形  $ABPC$  的面积最大,

$$S_{\triangle BCP}=\frac{1}{2}PQ(3-x)+\frac{1}{2}PQ(x-\frac{3}{2})=\frac{3}{4}PQ=-\frac{\sqrt{3}}{2}x^2+\frac{9\sqrt{3}}{4}x-\frac{9\sqrt{3}}{4},$$

当  $x=-\frac{b}{2a}=\frac{9}{4}$  时,  $S_{\triangle BCP}$  有最大值, 四边形  $ABPC$  的面积最大, 此时点  $P$  的坐标为

$(\frac{9}{4}, -\frac{5\sqrt{3}}{8})$ .



【点评】此题属于二次函数综合题，涉及的知识有：二次函数图象与性质，待定系数法确定函数解析式，相似三角形的判定与性质，以及坐标与图形性质，熟练掌握各自的性质是解本题的关键．